

H. SCHOTTEN

INHALT UND METHODE DES PLANIMETRISCHEN UNTERRICHTS

II



P. P.

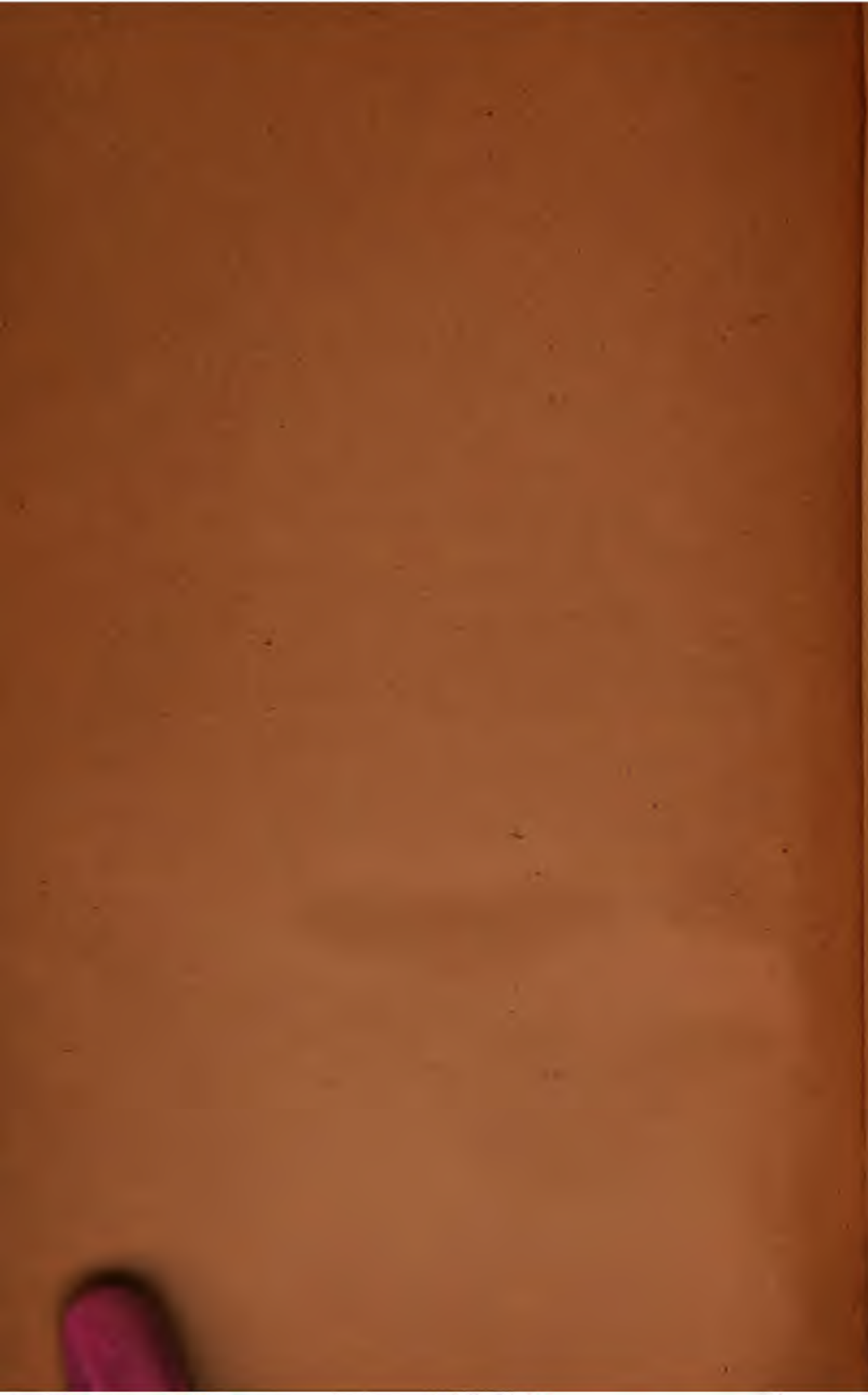
Schlußband historische, philosophische und didaktische Fragen besprechen wird. Eine **französische Ausgabe,** von französischen Mathematikern besorgt, hat zu erscheinen begonnen.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen,** die **Bibliotheca Mathematica** (Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften), das **Archiv der Mathematik und Physik,** die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,** die **Zeitschrift für Mathematik und Physik** (Organ für angewandte Mathematik), die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht,** die **Mathematisch-naturwissenschaftlichen Blätter,** ferner **Natur und Schule** (Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen), die **Geographische Zeitschrift** u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“.** Diese jährlich zweimal erscheinenden „Mitteilungen“, die unentgeltlich in 30000 Exemplaren sowohl im In- als auch im Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte **Ausführliche Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten,** 100. Ausgabe [XLVIII u. 272 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.



INHALT UND METHODE

DES

PLANIMETRISCHEN UNTERRICHTS.

EINE VERGLEICHENDE PLANIMETRIE

VON

DR. HEINRICH SCHOTTEN.

ZWEITER BAND.





LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1893.

Vorwort.

Länger als ursprünglich beabsichtigt war hat sich die Herausgabe des zweiten Bandes meiner vergleichenden Planimetrie verzögert. Aber mannigfache Hindernisse, deren Angabe hier überflüssig erscheint, standen im Wege.

Bei der Veröffentlichung des zweiten Bandes mufs ich zunächst den Herren Rezensenten des ersten Bandes meinen Dank aussprechen für die durchweg wohlwollende Beurteilung, die sie meinen Bestrebungen haben zuteil werden lassen. So erfreulich aber auch die einstimmige Anerkennung seitens der Kritik mich berührt hat, umso mehr war die Thatsache betrübend, dafs das Interesse der Fachgenossen sich meinem Buche nur in verschwindendem Mafse zugewendet zu haben scheint, so dafs der ideale Zweck, dem meine Arbeit gewidmet ist, eine Umschau des Geleisteten zu geben und „meine Fachgenossen über neuesten Stand wie Entwickelung der Planimetrie nach Inhalt und Methode zu orientieren,“[1]) bisher nur in sehr bescheidenen Grenzen sich verwirklicht haben dürfte.

Den Wünschen der Herren Rezensenten bin ich, soweit möglich, entgegengekommen; besonders habe ich an Stelle der früheren alphabetischen Reihenfolge der Zitate die chronologische eingeführt, wodurch die Übersicht über die Entwicklung der methodischen Fragen zu bedeutenderer Klarheit gelangt. Ich hoffe dadurch den Wert dieses „Zitatenschatzes“ wesentlich erhöht zu haben. Das wäre der beste Lohn für die allerdings nicht kleine Mehrarbeit.

Der Grundgedanke des vorliegenden Werkes hat, was mich besonders gefreut hat, allgemein Zustimmung und Beifall gefunden. Nur der Herr Rezensent im „Paed. Archiv“[2]) hat

---

[1]) S. Günther in seiner Besprechung des 1. Bandes H. Z. XXI. p. 529.

[2]) Paed. Arch. Band XXXIII. 1891. p. 760. — Auch diese Besprechung ist im übrigen durchaus anerkennend.

meine Aufgabe völlig mifsverstanden, wenn er sagt: „Zu bedauern ist, dafs der Herr Verfasser nicht zunächst seine Ansichten im Zusammenhange dargelegt hat.“ Das hätte ich bei der meiner Arbeit zugrunde liegenden Absicht nur dann thun können, wenn ich das ganze Werk auf einmal veröffentlicht hätte. Es ist aber doch wohl allgemein üblich, gröfsere Werke in einzelnen Bänden zu publizieren. Auch den Vorwurf des Herrn Rezensenten mufs ich zurückweisen, der darin liegt, dafs ich eine Reihe unwichtiger Lehrbücher beim Zitieren hätte weglassen können. Auch hier bin ich von ihm mifsverstanden worden. Es sollen ja nicht nur die wichtigen Arbeiten dem Leser vorliegen, er soll zugleich die Möglichkeit haben nachzuschlagen, wie irgend einer der mathematischen Schriftsteller über irgend einen wichtigen Punkt sich geäufsert hat: der Leser soll die Möglichkeit haben, die Auffassung auch derer kennen zu lernen, die selbst ohne Einflufs auf die Entwicklung geblieben sind. Denn auch die Kenntnis, wie sich Ansichten Bahn gebrochen und welche Ansichten allgemeinere Verbreitung gefunden haben, scheint mir lehrreich und interessant.

Von der ursprünglichen Absicht, im zweiten Bande auch auf die grundlegenden metaphysischen Fragen einzugehen, sowie eine ausführliche Darstellung der Entwicklung der Metageometrie zu geben, hat Verfasser aus praktischen Gründen Abstand genommen. Doch finden sich im dritten Kapitel Hinweisungen und Literaturangaben zu der letzteren Frage, da es sich bei dem Thema dieses Kapitels nicht umgehen liefs, hier und da das Gebiet der Metageometrie zu streifen.

Die ausführliche Behandlung und der Reichtum der Zitate, besonders im zweiten und dritten Kapitel, haben ferner dazu geführt, diesen zweiten Band auf die vorliegenden vier Kapitel zu beschränken. Es müssen also die im ersten Bande am Schlusse angekündigten Kapitel über geometrische Hülfsbegriffe und die Methode einem weiteren Bande vorbehalten bleiben.

II. Teil.

Richtung und Abstand als Grundlage der einleitenden Betrachtungen.



I. Kapitel.

Richtung und Abstand. Lagen- und Mafsuntersuchungen.

Im ersten Teile war schon angekündigt, dafs noch eine ausführliche Behandlung der Begriffe Richtung und Abstand folgen werde; und in der That bedürfen diese beiden Begriffe noch eines näheren Eingehens. Dabei würde eine gründliche Erörterung der Frage nach dem Wesen der Geometrie, insofern ob sie als Wissenschaft a priori oder als Erfahrungswissenschaft aufzufassen sei, unumgänglich sein; ja gerade diese beiden Begriffe scheinen geeignet zu sein, an die Spitze derartiger Erörterungen überhaupt gestellt zu werden. Dennoch hat es sich der Verfasser versagt, gerade auf diese Frage näher einzugehen, da das vorliegende Werk ja vorwiegend der Schule zu gute kommen soll und deshalb den Hauptwert auf die praktische Verwendbarkeit legen mufs. An anderer Stelle wird der Verfasser seinen Standpunkt in der berührten Frage ausführlich darlegen, hier soll nur so viel gesagt werden, dafs das Apriori der geometrischen Wissenschaft nach des Verfassers Ansicht einmal darin liegt, dafs wir es mit begrifflichen Abstraktionen (Idealgebilden) zu thun haben, dann aber darin, dafs diese Abstraktionen nach logischen Gesetzen des Denkens gebildet sind. Dafs Erfahrung mit in Frage kommt, wird wohl von keiner Seite geleugnet werden,[1]) aber nicht das ist das Entscheidende, dafs Erfahrung vorliegt, sondern darauf ist das Hauptgewicht zu legen, dafs diese Erfahrung auf gesetz-

---

[1]) Das liegt auch schon in Kants Worten „Begriffe ohne Anschauung sind leer"; Anschauung aber ist Erfahrung.

mäfsigem Wege der Denkthätigkeit verarbeitet wird resp. durch gesetzmäfsiges Denken geregelt wird; unsere Erfahrung macht die Geometrie nicht zur Erfahrungswissenschaft, die Art aber, wie sie zu stande kommt, macht sie zu einer Wissenschaft a priori.[1]) Wie sich die reine Anschauung, frei von Zufälligkeiten und subjektiven Fehlern, eine Funktion des Verstandes, von der sinnlichen Anschauung unterscheidet, so die Geometrie von den Erfahrungswissenschaften im gewöhnlichen Sinne dieses Wortes. Nehmen wir z. B. den Begriff Dreieck, so ist es unhaltbar, darunter etwa ein schematisches Gebilde zu denken — alle unsere Vorstellungen sind bestimmte Vorstellungen —, sondern die Allgemeinheit des Begriffes liegt darin, dafs wir uns ein zwar ganz bestimmtes, aber von allen besonderen Bedingungen freies Dreieck vorstellen.

§ 1. Richtung.

Was nun den Begriff Richtung betrifft, so kann Verfasser sich von vornherein auf seine Ausführungen am Anfang des fünften Kapitels im ersten Bande beziehen. Es war gezeigt worden, dafs wir bei der Betrachtung der geometrischen Gebilde als selbständiger Formen — oder wie wir jetzt lieber uns ausdrücken wollen: als Begriffe — vom Punkte ausgehen müssen. Während uns nun die Betrachtung eines einzelnen Punktes nichts Unterscheidbares bietet, treten bei der Setzung zweier Punkte sofort zwei Begriffe — Prädikate, wie Bolzano[2]) sagt — in Evidenz: Richtung und Abstand. Wir haben es hier, wenn wir unsere Betrachtung vorläufig auf den Begriff

---

[1]) In dieser Wesenheit der Geometrie sehe ich daher ihre Apriorität d. h. ihre allgemeine Gültigkeit und ihre Notwendigkeit; daher auch die feste Überzeugung von ihrer Wahrheit.

[2]) Bolzano, Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie. — Prag 1804.

§ 6. „Da Ein Punkt für sich allein nichts Unterscheidbares bietet, . . ., so ist der einfachste Gegenstand der geometrischen Betrachtung ein System zweier Punkte. Aus einem solchen Zugleichdenken zweier Punkte entspringen gewisse Prädikate (Begriffe) I. Entfernung, II. Richtung.“

Richtung beschränken, mit einer Qualitätsbeziehung[1]) zu thun. Wir fassen hier den Begriff Richtung in dem reinen, ursprünglichen eng eingeschränkten Sinne, der eben nur in dem Auffassen zweier von einander getrennter Punkte auftritt. Darin, dafs wir unsere Gedanken von einem Punkte auf einen zweiten richten,[2]) liegt eben der Begriff Richtung — und dafs dies psychologisch mit einem Aufwand von Minimum an Arbeit geschieht, darin liegt das Wesen des Begriffes Richtung: zugleich aber — und das möge gleich hier ausgesprochen werden — sein Zusammenhang mit dem Begriffe Abstand, als dem kürzesten Wege von einem Punkte zum andern. Der Begriff der Richtung kann nicht zur Klarheit kommen, wenn wir nicht zwei Punkte zu Hilfe nehmen, von ihrer Betrachtung ausgehen. Auch die Zitate werden das zeigen; wer auch immer den Versuch macht, die Richtung zu erklären, geht von dem Setzen zweier Punkte aus. Ausgangspunkt und Zielpunkt bestimmen Richtung. Dabei ist nicht zu übersehen, dafs es für denselben Ausgangspunkt unendlich viele Punkte giebt, die als Zielpunkte identische Richtung ergeben, und dafs umgekehrt bei festem Zielpunkt auch unendlich viele Ausgangspunkte identische Richtung ergeben. Hier aber handelt es sich schon nicht mehr um den reinen Begriff Richtung, wir vergleichen hier schon Richtungen mit einander, wenn auch der besondere Fall eintritt, dafs diese Richtungen identisch sind. Der Sprachgebrauch hat sich nun auch bei der Anwendung des Begriffes Richtung erweitert. Wir werden unbedenklich sagen, sich auf einem Kreise in einer bestimmten

---

[1]) Nichts Quantitatives mischt sich ein: es kann durchaus nicht gesagt werden, wie grofs etwa ist die Richtung oder ist diese Richtung gröfser oder jene — ganz abgesehen davon, dafs hier schon der Begriff nicht mehr rein für sich auftritt. Nicht eine bestimmte Richtung ist es, die den Begriff ausmacht, sondern Richtung. Insofern als Richtung als Aufeinanderbeziehen zweier Punkte aufgefafst werden mufs, ist der Begriff eine Relation.

[2]) An Stelle des psychischen Vorganges können wir auch direkt das ins Auge Fassen eines Punktes verwenden, das Richten unseres Blickes auf einen Gegenstand; in diesem Falle ist unser Auge der eine, der angesehene Gegenstand der andere Punkt. (Genau genommen ist der Gegenstand der Ausgangspunkt, unser Auge der Zielpunkt.)

Richtung bewegen: niemand wird zweifelhaft sein, was darunter zu verstehen ist, selbst wenn man sagte, sich auf einem Kreise von einem Punkte zu einem andern in bestimmter Richtung bewegen, es ist aber festzuhalten, dafs wir es hier nicht mehr mit dem reinen Begriff Richtung zu thun haben, wie er sich psychologisch bei dem Setzen zweier Punkte ergiebt.[1])

Es wird aber nicht überflüssig sein, darauf hinzuweisen, dafs die oben angestellten Erörterungen ganz allgemein gültig

---

[1]) Ich darf nicht unerwähnt lassen, dafs meiner Auffassung des Begriffes Richtung Widerspruch erwachsen ist. So heifst es in der Rezension des ersten Bandes, die Ernest Lindenthal in der Zeitschrift für das Realschulwesen XVI. Jahrgang, Heft 11, veröffentlicht hat: „Im Gegenteile kommt man zum Begriffe der Geraden erst durch die Erarbeitung der Zwillingsbegriffe „gerade“ und „krumm“.“ Sowie wir nicht verstünden, was „hell“ ist, wenn alle Gegenstände gleich hell beleuchtet wären, ebenso wenig könnten wir den Begriff „Gerade“ gewinnen, wenn es blofs gerade Linien gäbe. Daneben bleibt freilich wahr, dafs der Begriff „Gerade“ so einfach ist, dafs er durch andere Begriffe nicht erläutert werden kann. Die zwei ersten Begriffe (Richtung und Abstand) bezeichnet der Verfasser als unmittelbare Grundbegriffe a priori und sagt: „Setzen wir im Gedanken zwei Punkte, so ist damit sofort auch Richtung und Abstand gesetzt.“ Das ist nicht richtig; denn mit Hilfe zweier Punkte allein kommen wir niemals zum Begriffe Richtung, wohl aber mit Hilfe dreier Geraden, von welchen die erste und zweite dieselbe Richtung, die erste und dritte aber verschiedene Richtungen haben. Der Begriff „Gerade“ geht also dem Begriffe „Richtung“ voraus, nicht aber umgekehrt. Gäbe es in dieser Welt blofs Gerade einer und derselben Richtung oder, wie der Verfasser sagen würde, von ähnlicher Richtung, so wüfsten wir nicht, was überhaupt Richtung ist.“

Meine Ausführungen haben gezeigt, dafs ich mich dieser Ansicht nicht anzuschliefsen vermag. Man vergl. übrigens das Zitat aus Max Simons Programmarbeit. Geradezu entgegentreten aber mufs ich dem folgenden Satze der erwähnten Besprechung: „Richtung überhaupt“ und „bestimmte Richtung“ sind als Begriffe ebenso nur einmal vorhanden wie etwa der Begriff „die Eins“.

Das ist ganz entschieden nicht richtig. „Richtung überhaupt“ ist allerdings nur einmal vorhanden, es handelt sich hier eben um den Begriff Richtung; „bestimmte Richtung“ aber ist eine konkrete Anwendung und deshalb unzählig, so dafs es auch besser heifsen müfste „bestimmte Richtungen“.

sind, nämlich im Raume, nicht eingeschränkt durch den Begriff irgend einer Fläche oder Linie; käme diese letztere Bedingung hinzu, so sind Ebene und Gerade diejenige Fläche resp. Linie, in denen der Begriff Richtung sich mit dem allgemein gültigen deckt[1]) — in jeder anderen Fläche (Linie) aber hat er eine besondere Bedeutung. So segelt ein Schiff auf unserer Erde in einer bestimmten Richtung, aber hier hat das Wort eine ganz andere Bedeutung als bei der reinen Auffassung der unmittelbaren Relation zweier Punkte.

Auf die Seite 307 im ersten Bande angeführten Mifsbräuche des Wortes Richtung nochmals einzugehen, halte ich für überflüssig; wohl niemand, der sich auch nur einmal die Mühe genommen hat, sich den Begriff Richtung klar zu machen, wird in die dort erwähnten Fehler verfallen, ja ich glaube bestimmt, dafs auch im gewöhnlichen Leben dieser Fehler nur vereinzelt vorkommt, nämlich die Verwechslung von Ziel und Richtung.[2])

Was sich sonst noch über den Begriff Richtung sagen läfst, wird sich ungezwungen bei der Besprechung der einschlägigen Arbeiten und der Kritik der Zitate ergeben. Zuerst mufs ich auf einen Aufsatz eingehen, auf den ich auch schon im ersten Bande p. 307 hingewiesen habe; er rührt von J. C. V. Hoffmann her und ist in seiner Zeitschrift Bd. 3 veröffentlicht. Der Aufsatz ist überschrieben „Studien über geometrische Grundbegriffe“ und enthält unter I „den Begriff der Richtung und Verwandtes“.

Hoffmann leitet den Artikel mit den Worten ein: „Wie in den meisten Lehrbüchern der Geometrie die Untersuchungen über unsere Raumvorstellungen und die Entwicklung der geometrischen Grundbegriffe (gleichsam der metaphysische Teil) die schwächste Seite ist, so wird ganz besonders unter diesen Grundbegriffen der Begriff der Richtung vernachlässigt. Kaum erörtert oder umschrieben, geschweige denn definiert,

---

[1]) Es liefse sich hierauf vielleicht eine Definition von Ebene und Gerade gründen.

[2]) Herr Direktor Thaer ist anderer Ansicht, er schreibt mir: „Ziel“ und „Richtung“, die Verwechslung mag in Schülerköpfen häufiger sein als man denkt.

wird er meist stillschweigend vorausgesetzt als unmittelbar klar (nicht erklärbar) oder nicht erklärungsbedürftig. Das Einzige, was die Erörterungen dieses Begriffes gemeinsam haben, ist seine Unzertrennbarkeit von dem Begriffe der Geraden."

Hoffmann giebt dann eine Zusammenstellung[1]) von Erörterungen „ohne jeden kritischen Kommentar". Interessant ist, dafs weder Euklid noch Legendre, weder Herbart noch Klügel (Wörterbuch) für nötig halten, den Begriff zu erklären. An diese Auslese schliefst sich dann die Darstellung von Hoffmanns eigener Ansicht, in der er zu zeigen versucht, dafs der Richtungsbegriff ganz klar ist und dafs er doch sich einer Definition nicht entzieht.

„Richtung setzt voraus ein Ziel und einen Ausgangspunkt."

Hoffmann kommt so auf Bewegung, Bewegbares und Kraft als Ursache der Bewegung. Während, durchaus richtig, von der Kraft abstrahiert wird, geht H. auf die andern Punkte näher ein. Dabei kommt er zu dem richtigen Resultat, dafs jeder Raumteil ewig an einer Stelle bleibt und dafs einzig und allein die Materie bewegbar ist. Der Raum ermöglicht nur die Bewegung. Denkt man sich nun ein Stoffteilchen bewegt, so mufs noch bevor es seine Ruhelage verläfst, um an sein Ziel zu gelangen, schon eine Auswahl unter den unzählig vielen Zielpunkten getroffen sein. Diese Auswahl fufst bei wirklicher Bewegung auf der bewegenden Kraft, bei der idealen Bewegung auf dem Willen des betrachtenden Subjekts.

In der Auswahl des Zieles liegt der Keim dessen, was

---

[1]) Die zitierten Autoren sind Baltzer, B. Becker, J. C. Becker, Fresenius, Fries, Helmes, Kambly, Kober, E. Müller, J. Müller, T. Müller, Ohm, Recknagel, Reidt, Riecke, Schlömilch, Snell, J. Steiner, Thibaut, Trendelenburg, Mauritius. Aus der Arbeit von Mauritius (Osterprogramm, Coburg 1870) wird sehr ausführlich zitiert. Als wichtigsten Satz möchte ich hier folgenden wiedergeben: „Die Richtung ist weder eine Qualität noch eine Quantität, sondern ein Begriff, welcher zur Drehung in demselben Verhältnis steht, wie der Punkt zur Linie. Auch irrt man, wenn man der Geraden als solcher eine Richtung zuschreibt."

wir Richtung nennen, daher Richtung vor Linie. Dies scheint uns mit unserer Ansicht völlig übereinzustimmen, wenn auch der Wortlaut ein anderer ist. Was nämlich ist die Auswahl des Zieles denn anderes, als das Setzen eines zweiten Punktes? Also auch Hoffmann kommt zu dem Resultat, dafs mit dem Setzen zweier Punkte Richtung gegeben ist, wenn er auch sagt, dafs nur der Keim dessen, was wir Richtung nennen, in der Auswahl des Zieles d. h. dem Setzen des zweiten Punktes liege.

Als zweites Moment kommt hinzu die Fixierung des Zieles während der Bewegung (dauernder Hinblick aufs Ziel oder das im Auge Behalten desselben). Nur der werdenden Linie kommt Richtung zu, doch schreiben wir sie auch der gewordenen zu. Das sei psychologisch zu erklären.

Der Gedanke, dafs eigentlich nur der werdenden Linie Richtung zukomme,[1]) — und dann selbstverständlich auch nur eine — hat auf den ersten Anblick etwas sehr Bestechendes, kann aber doch nur bei der ganz äufserlichen Auffassung direkter Bewegung von Materie bestehen. Gerade der Hinweis auf die Psychologie mufste dazu führen, diese Ansicht zu modifizieren. Bei genauer Erörterung ergiebt sich doch, dafs wir nicht einen sich bewegenden Punkt annehmen dürfen, sondern eine Reihe von verschiedenen Punkten, eine Punktreihe, deren Träger dann, wenn wir sie in ihrer Gesamtheit zusammenfassen, eine Linie ist. Schon bei der Zusammenfassung eines Minimums von verschiedenen Punkten aber, d. h. bei zwei Punkten, resultiert der Begriff Richtung, ja in diesem Falle haben wir ihn in seiner ganzen Reinheit. Der folgende Satz bestätigt, nach unserer Ansicht, die eben gegebenen Ausführungen.

Jede Linie hat doppelte Richtung. Die Wahl derselben ist rein willkürlich, subjektiv. Daher erfordert auch die Richtung notwendig ein Subjekt, Lage und Länge dagegen hat die Linie auch ohne Subjekt.

„Das Ziel soll aber nicht blofs ausgewählt und während

---

[1]) „Richtung ist nur vorhanden bei Bewegung.“ Bolze in H. Z. II p. 334. — Vergl. ferner H. Z. III p. 120.

der Bewegung fixiert, sondern es soll auch erreicht werden.“ Es liegt also in der Bewegung auch das Streben nach dem Ziele und das erklärt auch, „dafs die Richtung in der Geraden, d. h. in dem kürzesten Wege zur Erscheinung kommt.“ Denn jede Kraftwirkung unterliegt dem Beharrungsgesetze; dieses aber erlaubt dem Bewegten nicht, ein neues Ziel zu wählen, wodurch die Fixierung des ersten Zieles gestört und eine Verzögerung in der Bewegung bewirkt werden würde. Das Wesen der geraden Linie wurzelt in dem Beharrungsgesetz.“[1])

Als das wichtigste der drei Momente bezeichnet H. die Fixierung des Zieles. Er fährt dann fort:

„Aus dem Vorstehenden folgt zunächst, dafs Richtung kein Gröfsenbegriff ist. Denn die Wahl und Fixierung eines Räumlichen ist weder der Vermehrung noch der Verminderung fähig. (Richtungen lassen sich weder addieren, noch substrahieren etc.) Man kann deshalb auch nicht sagen: „Diese Richtung ist gröfser (kleiner) als jene“.“[2])

Erst durch Einmischung des Zeitbegriffes käme man auf die Geschwindigkeit und so dazu, die Richtung als intensive Gröfse anzusehen, die sie doch nicht sei; denn man könne nicht von einer stärkeren oder schwächeren Richtung sprechen. „Sie ist vielmehr eine rein räumliche Qualität oder eine Modalität der Bewegung und als solche gegen Gröfse völlig indifferent.“ H. bejaht dann unbedingt die Frage, ob Richtung der Veränderung fähig sei oder nicht,[3]) wobei er die

---

[1]) Dem gegenüber möchten wir noch einmal auf das von uns oben ausgesprochene psychologische Gesetz von dem Minimum psychischer Arbeit bei der Erfassung zweier Punkte hinweisen, das uns eine natürlichere Erklärung zu bieten scheint, als das Beharrungsgesetz. Die Natur arbeitet immer mit einem Minimum von Kraft, dies Gesetz gilt allgemein.

[2]) Man vergl. unsere Ausführungen am Anfang dieses Kapitels.

[3]) Ich kann meine Richtung ändern (man sagt auch wohl die Richtung ändern), aber man meint damit eine neue andere Richtung resp. ein anderes Ziel wählen. Eine Richtung an sich läfst sich nicht ändern. Indem das Subjekt einen Punkt in einer bestimmten Richtung bewegt denkt, kann es dieser Bewegung Einhalt thun und dann ihn in einer andern Richtung bewegt denken, wofür man kurz aber falsch

Frage erörtert, wodurch die Richtungen nicht geändert werden können. Er kommt dabei auf die Äquivalenz verschiedener Ziele zu sprechen, auf das Vor- und Hintereinanderliegen von Punkten, das Decken oder Verdecken. (Gemeint ist hier jedenfalls, dafs die Gerade in gewisser Lage unserem Auge als Punkt erscheint.)

Nach diesen Erörterungen heifst es: „Wodurch wird nun aber die Richtung geändert? Durch nichts anderes als durch Wahl und Fixierung eines neuen Zieles."

Und weiter führt Hoffmann nun aus, dafs ein bewegter Punkt nur eine Richtung haben kann, verschiedene Richtungen dagegen nur nach einander annehmen kann.

Hiermit aber widerspricht sich der Verfasser selbst, denn hierin liegt ja doch, dafs nicht die Richtung geändert wird, sondern dafs wir mit der Veränderung des Zieles eine neue Richtung einschlagen. Richtung selbst ist einer Veränderung durchaus unzugänglich; so wenig wie sie einer Vergröfserung oder Verkleinerung fähig ist, so wenig ist sie überhaupt veränderlich.

Auf die weiteren Ausführungen Hoffmanns werden wir im dritten Kapitel noch näher eingehen.

Von weiteren hierher gehörigen Artikeln der Hoffmannschen Zeitschrift verdienen noch folgende erwähnt zu werden.

Bd. I. p. 235 sagt Kober (Über die Definitionen der geometr. Grundbegriffe):

„Der Begriff „gerade" kann und braucht nicht erklärt zu werden: er fällt zusammen mit dem Begriffe „Richtung"."

„Soll eine bestimmte gerade Linie fixiert werden, so ist aufser der Richtung noch ein Punkt nötig: Eine gerade Linie ist bestimmt durch einen Punkt und die Richtung. — Die Richtung kann durch einen (zweiten) Punkt (als Ziel der Richtung) ersetzt werden."

Aus dem zweiten Aufsatze geht hervor, dafs Gerade und

---

sagt, man habe die Richtung geändert. Man vergl. meine Ausführungen Bd. I p. 308 und den Artikel Bewegung im fünften Kapitel. Lindenthal äufsert sich in seiner schon erwähnten Rezension hierüber folgendermafsen: „Auf den ersten Anblick unrichtig, in der That aber sehr treffend ist, was der Verf. auf Seite 308 sagt."

Richtung nicht zusammenfallen und zum Schlufs kommt Kober zu dem nämlichen Resultat wie wir, dafs die Richtung eben in dem Setzen eines zweiten Punktes besteht.

Der zu Kobers Aufsatz in Beziehung stehende Cialas in Bd. II der H. Z. ist schon in Bd. I p. 301 erwähnt.

Auch Beckers Aufsatz in H. Z. Bd. II p. 89—97 beschäftigt sich mit dem Begriff Richtung: „Einer Linie als Raumgebilde kommt eine Stellung, nicht aber eine Richtung zu. Diese ist ein Merkmal der Bewegung oder anderer Thätigkeiten. Das Auge sieht einen Gegenstand in einer bestimmten Richtung, und ein bewegter Punkt, der von einer bestimmten Stelle aus immer in derselben Richtung gesehen wird, bewegt sich mit unveränderter Richtung. Die Bahn aber, welche dabei jeder einzelne seiner Punkte durchläuft,[1]) hat eine bestimmte Stellung und nicht eine Richtung.“

Kober nimmt noch einmal das Wort in dieser Sache in Bd. III p. 535, weist besonders Verwechslung von Ziel und Richtung[2]) zurück, erklärt sich gegen die Auffassung, als ob nur der werdenden Linie eine Richtung zukomme, nicht aber der gewordenen[3]) und bekämpft schliefslich Beckers eben zitierte Worte.

Im 21. Bd. der H. Z. spricht sich der Herausgeber noch einmal über den Begriff Richtung aus, indem er wesentlich seine früheren Erörterungen rekapituliert. Die betreffende Stelle — Seite 252 — lautet: „Der Begriff Richtung erfordert einen psychischen Bewegungsprozefs in unserer Vorstellung. Er ist gebunden an die Gerade mit einem Ursprung und einem Ziel. Richtung ist nicht zu denken ohne die Vorstellung einer Bewegung in einer Geraden vom Ursprung nach dem Ziel; aber selbst wenn die wirkliche oder die psychische Bewegung nicht zu Stande kommt, so ist wenigstens das Streben, das Ziel zu erreichen, vorhanden. Man kann daher auch kurz und bündig definieren: Richtung ist Streben nach dem Ziel.“

---

[1]) Nicht recht klar.

[2]) Bolze, H. Z. Bd. II p. 334.

[3]) Man vergl. meine obigen Ausführungen zu Hoffmanns Aufsatz.

Am Schlufs des Artikels wird des Aufsatzes gedacht: Die Richtung einer geraden Linie als mathematische Gröfse betrachtet. Ein Beitrag zur Elementargeometrie von Dr. Adrian zu Stavenhagen, der im Zentralorgan f. d. J. d. Realschulwesens, Bd. 18, Seite 228, abgedruckt ist.

Es heifst darin: „Gewöhnlich wird das Wort Richtung in der Planimetrie ohne Definition gebraucht. Von unserem Gesichtspunkte aus aber brauchen wir eine ganz genaue Definition. Zu diesem Zwecke setzen wir die Richtung einer Geraden als Fundamentalrichtung fest.“ Die wunderlichste Erklärung, die man sich ausdenken kann, die vor allem an dem logischen Grundfehler leidet, dafs der zu erklärende Begriff in der Erklärung selbst wieder verwendet wird.

Eine eigenartige Erklärung findet sich in dem Aufsatz: Die Wichtigkeit einer richtigen Auffassung von Thibauts Beweis der Summe der Dreieckswinkel für die gesamte Elementar-Geometrie und besonders für die Theorie der Parallelen von Dr. th. F. H. Germar (Grunerts Archiv, Bd. 15, p. 361). Es heifst dort: „Das Wort Richtung ist nämlich von der Bewegung des Auges hergenommen und bezeichnet diejenige Stellung desselben, in welcher es den kleinsten Gegenstand am deutlichsten sieht. Kann nun eine Linie entweder durch ihre eigene oder des Auges Bewegung in eine solche Stelle kommen, dafs in der Richtung desselben alle Elemente der Linie in einen Punkt zusammenzufallen scheinen oder sich decken, so hat sie in allen ihren Elementen die nämliche Richtung wie die Richtung des Auges, also einerlei Richtung. Dies erhellet auch schon aus der Art, wie die gerade Linie praktisch geprüft wird.“

Wenn auch diese Ausführungen manches Unklare enthalten — ich meine da vor allen Dingen die Worte: die Stellung des Auges, in welcher es den kleinsten Gegenstand am deutlichsten sieht —, so läfst sich doch dem darin liegenden Grundgedanken eine gewisse Berechtigung nicht absprechen; besonders ist die Erklärung von einerlei Richtung (nach dem Grundsatze, sind zwei Dinge mit einem dritten äquivalent, so sind sie es auch untereinander) recht beachtenswert. Für unsere Betrachtungen ist das Wesentliche

die Zurückführung des Begriffes Richtung auf den physischen Vorgang der Augenstellung.

Im 49. Bande von Grunerts Archiv p. 178 findet sich ferner ein hierher gehöriger Aufsatz von L. v. Pfeil, Zur Theorie der geraden Linie, dem wir folgendes entnehmen:

„Gerade bezeichnet, nach dem völlig korrekten Sprachgebrauche, die Unveränderlichkeit einer Richtung; gerade ist also an sich selbst schon ein zusammengesetzter Begriff, enthaltend Richtung und deren Unveränderlichkeit."

„Der Begriff Richtung und der Begriff Linie sind ganz gewiſs verschiedene. In der Linie liegt der Begriff der Länge, in der Richtung nicht."

„Es ist nicht notwendig, die Richtung durch eine gerade Linie auszudrücken; bekanntlich bedient man sich dazu auch des Kreisbogens."

„Gröſse und Richtung sind einfache Begriffe."

Hierzu bemerkt der Verfasser in einer Anmerkung: „Wollte man Richtung erklären, etwa durch die gerade Linie, so erklärte man das Einfache durch das Zusammengesetzte. Jedermann weiſs, auch ohne die unmögliche Erklärung, daſs eine Bewegung, etwa das Ziehen eines Kreises, in irgend einer Richtung erfolgt, ohne doch dabei an die gerade Linie zu denken."

Wir selbst haben folgendes diesen Ausführungen hinzuzufügen.

Wir stimmen mit dem Verfasser darin überein, daſs wir den Begriff der Geraden in doppelter Beziehung auffassen, qualitativ und quantitativ; Richtung und Abstand (Länge) vereinigen sich in der Geraden. Der Begriff der Richtung, den v. Pfeil als einen einfachen bezeichnet, ist nach unserer Ansicht ein Begriff a priori, das a priori in dem Sinne genommen, in dem wir es am Anfange dieses Kapitels geschildert haben. Richtung ist vor der Geraden da, sofort mit dem Setzen zweier Punkte. Dagegen möchten wir statt Unveränderlichkeit sagen: Beibehaltung derselben Richtung, da nach unseren obigen Ausführungen „Richtung überhaupt" unveränderlich ist. Was ferner den erweiterten Gebrauch des Wortes Richtung betrifft (z. B. beim Ziehen eines Kreises resp. der Bewegung

auf einer krummen Linie), so haben wir es dabei eben nicht mehr mit dem reinen Begriff zu thun: wir dürfen also diesen Sprachgebrauch bei der Erörterung des Begriffes selbst nicht in Betracht ziehen. Dafs übrigens die Begriffe Gerade und Richtung nicht identifiziert werden dürfen, dafür möchten wir noch folgendes ausführen. Von der Geraden kann man ein Stück — eine Strecke — nehmen, von der Richtung nicht;[1]) Richtung ist immer etwas Unteilbares, Ganzes. Eine Strecke können wir verlängern, etwas Ähnliches giebt es von der Richtung nicht. Wir sprechen ferner von entgegengesetzten Richtungen; kann man aber etwa von entgegengesetzten Geraden sprechen?

Kant, Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume. — 1768.

„Denn die Lagen der Teile des Raumes in Beziehung aufeinander setzen die Gegend voraus, nach welcher sie in solchem Verhältnis geordnet sind, und im abgezogensten Verstande besteht die Gegend nicht in der Beziehung eines Dinges im Raume auf das andere, welches eigentlich der Begriff der Lage ist, sondern in dem Verhältnis des Systems dieser Lagen zu dem absoluten Weltraume.“[2])

---

[1]) Es ist undenkbar, Richtung quantitativ aufzufassen.

[2]) Kant geht in dieser Abhandlung von dem Begriff der Gegend aus, von dem er leider eine uns nicht befriedigende Erklärung giebt. Nach unserer Ansicht kann der Begriff der Gegend erst mit Hilfe des Begriffes Richtung erklärt werden: Gegend ist bestimmte Richtung. (Was ferner den allgemeinen Gebrauch dieses Wortes angeht, so ist er ein schwankender zum Teil irdisch, zum Teil auf den allgemeinen Weltenraum bezogen. Insofern wir das Wort Gegend auf der Erde gebrauchen, ist es eingeschränkt durch die Beschaffenheit der Erdoberfläche.) Nach den weiteren Worten fafst Kant unter „Lage“ das zusammen, was wir als Richtung und Abstand gesondert betrachten, indem er die Lage als die Beziehung eines Dinges im Raume auf das andere bezeichnet. Es ist also offenbar, dafs der Begriff Richtung, wie wir ihn darstellen, dem der Lage vorausgeht — jedenfalls ein einfacher Begriff gegenüber dem zusammengesetzten der Lage ist. Wenn nun Kant die Gegend wiederum als das Verhältnis des Systems der Lagen gegen den allgemeinen Weltenraum bezeichnet, so kommt er damit zu einem noch zusammengesetzteren Begriffe, der sich von dem reinen, einfachen Begriffe der Richtung wesentlich unterscheidet.

Bolzano, Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie. — Prag 1804.

§ 6. „Da ein Punkt für sich allein betrachtet nichts Unterscheidbares bietet ..., so ist der einfachste Gegenstand der geometrischen Betrachtung ein System zweier Punkte. Aus einem solchen Zugleichdenken zweier Punkte entspringen gewisse Prädikate (Begriffe) I. Entfernung; II. Richtung."[1])

Schweins, System der Geometrie. — Göttingen 1808.

p. 4: „Das Erste, was bei Linien in Betrachtung kommt, ist ihre Richtung. Denken wir die Linie nur nach einer einzigen bestimmten Richtung hin, so haben wir die gerade ... Linie."

p. 5: „Das, was bei einer Linie in Untersuchung gezogen werden kann, ist ihre Richtung und Gröfse. Ein Punkt

---

[1]) Wir haben auf diese Stelle schon am Anfang dieses Kapitels hingewiesen. Bolzano geht auf die Natur der beiden Prädikate (Begriffe) nicht näher ein, aber aus den Worten: „Aus einem solchen Zugleichdenken zweier Punkte entspringen", sowie daraus, dafs er auf die beiden Prädikate nicht weiter eingeht, kann man wohl mit Recht schliefsen, dafs auch Bolzano die in Frage stehenden Begriffe als ursprüngliche auffafst, hinter die ein weiteres Zurückgehen nicht möglich ist. Ich glaube auch kaum, dafs im Ernst jemand dieser Ansicht nicht zustimmt: es wird sich nur empfehlen, das Wort „apriori" zu vermeiden, da es bei vielen, wie es scheint, in argem Mifskredit steht. Wie in der Chemie für unser menschliches Erkennen gewisse Grundstoffe (einfache Stoffe, Elemente) existieren — von denen jederzeit erwartet werden kann, dafs sie noch weiterer Zerlegung fähig sind —, so müssen wir auch bei dem hier behandelten Gegenstande gewisse Begriffe als einfache, ursprüngliche anerkennen, deren Analyse dem menschlichen Geiste zur Zeit nicht möglich ist (ob in der Zukunft, diese Frage gehört nicht hierher). Ob wir nun diese ursprünglichen, einfachen Vorstellungen als apriorische bezeichnen oder anders, das ist meiner Meinung nach doch nur von untergeordnetem Werte, aber für die allgemeine Diskussion ist es doch bequem, eine derartige Bezeichnung zu haben. Wenn ein Rezensent (des I. Bandes) Vorstellungen a priori Wunder nennt, so läfst sich dem eben doch nur entgegenhalten, dafs es für unser Erkennen Grenzen giebt, jenseits deren für uns das Wunder oder das Apriori liegt. Fafst man das Apriori in der oben von uns dargestellten Weise auf, so, meine ich, müfste es doch als berechtigt anerkannt werden.

ist nicht hinreichend, um ihre Richtung zu bestimmen, denn durch ihn können unendlich viele Linien gehen, wovon jede eine andere Richtung hat. Ein zweiter Punkt in dieser Linie unterscheidet aber diese Linie von jeder anderen.[1] Zwei Punkte bestimmen also die Richtung einer Linie."

Develey, E., Anfangsgründe der Geometrie in einer natürlichen Ordnung und nach einem durchaus neuen Plane. — Deutsch von Deyhle. — Stuttgart 1818.

Nach einer längeren Ausführung über die Gerade heifst es p. 9:

„Dieses angenommen, so wollen wir in dem Raume einen Punkt und eine unbestimmte gerade Linie, die durch diesen Punkt geht, betrachten; diese gerade Linie wird um diesen Punkt, den man als fest annimmt, nach allen erdenklichen Seiten sich drehen können; in ihrer Bewegung wird sie also einen anderen festen Punkt antreffen können, der in einer gröfseren oder kleineren Entfernung vom ersten willkürlich angenommen wird; dann wird diese unbestimmte gerade Linie, wenn man sie durch diese zwei unbeweglichen Punkte gehen und hierauf anhalten läfst, ihre Lage im Raume nicht mehr ändern können."[2]

„Betrachtet man aber die verschiedenen Lagen dieser geraden Linie, indem sie sich um den ersten Punkt drehte, als wenn sie eben so viele verschiedene gerade Linien bildete,[3] so wird man einsehen, dafs alle diese Linien im Augenblicke, wo sie den zweiten Punkt treffen, zusammenfallen und nur eine und eben dieselbe gerade Linie bilden; denn diese verschiedenen Geraden sind nur eine einzige Gerade in verschiedenen Lagen, und unter allen diesen Lagen hat eine einzige durch den zweiten Punkt eine bestimmte Richtung."

Thibaut, Grundrifs der reinen Mathematik. — Göttingen 1822.

---

[1]) Das gilt doch nur von den geraden Linien. Ebenso gilt der folgende Satz nur von der Geraden.

[2]) Ganz dieselben Resultate, als wenn wir von zwei Punkten ausgehen.

[3]) Was der eigentlich richtige Gedanke ist.

p. 175: „Das Wort Richtung bezeichnet den als notwendig erscheinenden Gang, welchen die Konstruktion einer geraden Linie in ihrem ganzen Verlaufe zu nehmen hat, sobald sie von einem bestimmten Anfangspunkte zu einem gegebenen Endpunkte fortschreiten soll.[1]) Die Richtung einer geraden Linie ist durchaus immer dieselbe, die gerade Linie selbst ihr unmittelbarer Ausdruck."

Fries, Die mathematische Naturphilosophie. — Heidelberg 1822.

p. 366: „Die Verhältnisse der Figuren werden nach Ort, Richtung, Lage und Bewegung des neben einander Befindlichen vorgestellt."[2])

p. 367: „Die Grundbegriffe sind hier eigentlich die von Ort und Richtung." „Richtung bezeichnet das oben (s. erstes Zitat) angegebene räumliche Verhältnis."[3])

Ulrich, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Göttingen 1836.

p. 409: „Die Vorstellung des Weges, den man einzuschlagen hat, um auf einer geraden Linie von einem Punkte desselben nach einem andern zu gelangen, führt zu dem Begriff der Richtung. Ohne eine entweder vorhandene oder gedachte gerade Linie ist keine Richtung möglich. Eine bestimmte

---

[1]) Also auch Thibaut geht von den beiden Punkten aus; zugleich scheint er als das ursprüngliche anzunehmen, dafs die Richtung der Geraden nur bei ihrer Entstehung zukomme, was allerdings durch den Schlufs, dafs die gerade Linie der unmittelbare Ausdruck der Richtung sei, in erwünschter Weise modifiziert wird. Darauf, dafs wir in der Geraden auch die entgegengesetzte Richtung haben, wird gar keine Rücksicht genommen; hier, wie bei vielen anderen Autoren, hätte an Stelle der Geraden der Begriff des Strahls gesetzt werden müssen. Man vergleiche übrigens Hoffmanns Artikel und unsere Bemerkungen dazu.

[2]) Die Ausführungen erscheinen nicht besonders klar. So ist besonders der Unterschied von Ort und Lage hier nicht ersichtlich. Was aber die Bewegung bei dieser Erklärung soll, ist ganz unerfindlich.

[3]) Durch diese Sätze wird der Sinn des ersten fast noch mehr verdunkelt.

Richtung setzt also ebenso, wie eine gerade Linie, zwei Punkte als gegeben voraus, die sie in sich aufzunehmen hat, und kann über dieselben hinaus gleichfalls nur verlängert werden."[1])

Arneth, System d. Geometrie. — Stuttgart 1840.

p. 3: „Die unmittelbare Beziehung eines Punktes zu einem andern wird Richtung genannt."[2])

p. 9: „Die Gröfse einer Geraden ist bestimmt durch die beiden Endpunkte derselben; die Gerade selbst heifst die Entfernung dieser beiden Punkte."

„Ist *AB* eine gegebene Gerade, so sagt man von einem Punkte *C* derselben, welcher diesseits *B* liegt, er sei näher, und von einem andern Punkte *D*, welcher jenseits *B* sich befindet, er sei ferner von *A* als *B*."

„Die Lage einer Geraden, ihre Richtung[3]), wird bestimmt durch zwei Punkte, durch welche die Gerade gehen soll. Ist nur ein Punkt gegeben, so kann man durch denselben, nach den verschiedensten Richtungen hin, unendlich viele Gerade

---

[1]) Ulrich tritt dadurch zu unserer Ansicht in scharfen Gegensatz, dafs er die Gerade vor der Richtung annimmt, was wir an vielen Stellen als unrichtig zu beweisen uns bemüht haben. Doch ist es vielleicht nicht überflüssig, auch hier noch einmal zu betonen, dafs beim Setzen zweier Punkte Richtung (und Abstand) ohne weiteres existieren, dafs die Gerade aber erst vom betrachtenden Subjekt konstruiert (oder gedacht) werden mufs. Dafs diese Gerade durch die beiden Punkte völlig bestimmt ist, scheint die Ursache zu sein für die Annahme, dafs durch zwei Punkte auch immer eine Gerade existiere resp. angenommen werden müsse. Noch mufs Verwahrung dagegen eingelegt werden, dafs es heifst, man könne eine Richtung über einen Punkt hinaus verlängern. Hierzu vergl. man meine Ausführungen auf S. 15.

[2]) Diese Erklärung stimmt im wesentlichen mit der unsrigen überein. Doch ist zu bedauern, dafs der Verfasser seiner Auffassung nicht treu bleibt und in den folgenden Auseinandersetzungen durch mannigfache Inkonsequenzen die erste gute Erklärung verdunkelt.

[3]) Hier wird, entgegen der obigen Erklärung, Richtung mit Lage einer Geraden identifiziert. Doch sind die direkt folgenden Auseinandersetzungen geeignet, diesen Gegensatz einigermafsen aufzuheben und die eigentliche Meinung des Verfassers zu erläutern und klarzustellen. Später freilich wird wieder alles unklar und verworren.

ziehen, ist aber ein zweiter Punkt bestimmt oder gegeben, so wird die Gerade, welche durch beide Punkte gehen soll, von allen übrigen ausgezeichnet, ihre Lage und Richtung ist bestimmt und alle Geraden, welche durch dieselben Punkte gehen, fallen mit ihr zusammen, sind dieselben. Von Geraden, deren Richtungen[1]) durch dieselben Punkte bestimmt werden, kann man sagen, sie haben identische Richtungen, werden sie alsdann auch durch dieselben Endpunkte begrenzt, so ist auch ihre Lage identisch."

Frantz, Philosophie der Mathematik. — Leipzig 1842.

p. 69: „Darum ist die Linie eine bestimmte Richtung, und als solche ist sie eine gegen andere..., die Linie ist als die Richtung des Raumes eine bestimmte unter andern. Indem der Raum sich richtet, setzt er in sich unendlich verschiedene Richtungen... — Die Richtung ist also eine bestimmte, indem sie sich von andern unterscheidet. Das Prinzip ihrer Bestimmtheit ist eben das Unterscheiden, das reine Unterscheiden. Die Richtung ist diese, dadurch, daſs sie nicht die andere ist, die andere selbst nur ihr Nicht, ihr abstrakter Gegensatz ist. Dies ist die Perpendikularität..."

In einer Anmerkung heiſst es: „Wenn man sonst von Richtung, und namentlich von entgegengesetzter Richtung spricht, so wird dabei an eine Bewegung von einem Punkte nach einem andern gedacht, und dann ist der Richtung von a nach b die von b nach a entgegengesetzt... Wir aber betrachten die reine Richtung, die an sich wohl Bewegung, aber nicht die materielle von einem Punkte zu einem andern, sondern vielmehr die Bewegung des Raumes in sich selbst,

---

[1]) Hier würde der Ausdruck „Lage" entschieden vorzuziehen sein, wenn nicht Verfasser am Schlusse dieses Absatzes auf einmal eine ganz neue Definition von Lage gäbe. Oben heiſst es: „Die Lage einer Geraden, ihre Richtung" und der Abschnitt schlieſst mit den Worten: „Werden zwei Gerade durch dieselben Endpunkte begrenzt, so ist auch ihre Lage identisch." Es kommt also ein ganz neues Moment hinzu, das Moment der Begrenztheit, ein Gröſsenbegriff, der mit Lage der Geraden gar nichts zu thun hat. Der Grund für die Verwirrung liegt daran, daſs Gerade und Strecke nicht genau von einander geschieden werden.

sein Sich-Unterscheiden ist. Die Richtung entsteht nicht als Linie durch die Bewegung eines Punktes, sie ist ganz und auf einmal da, die Punktualität ist in ihr nur Moment.... Sowie die Bewegung anhebt, ist die Richtung, d. h. die Linie bestimmt. Dafs eine Richtung sei, dies ist die Linie."[1])

Koch, Bemerkungen über die Elementarplanimetrie. — Budissin 1842.

„Gewifs kann die Vorstellung der Richtung nicht von der geraden Linie getrennt, aber auch nicht als derselben völlig gleich angesehen werden."

„Die Vorstellung der Richtung ist die von der Entstehung einer unendlich langen geraden Linie durch die ohne Ende fortgesetzte Bewegung eines Punktes, welche an einer bestimmten Stelle im Raume anfängt."[2])

J. H. T. Müller, Lehrbuch der Mathematik. — Halle 1844.

p. 5: „Durch die Aufeinanderfolge, in welcher zwei die Lage einer Geraden bestimmende Punkte genannt werden, läfst sich zugleich die Richtung bestimmen, in welcher man sich die Bewegung eines dieselbe erzeugenden Punktes gedacht hat."

Steffenhagen, Kompendium der Planimetrie. — Parchim 1847.

p. 7: „Richtung heifst Bestimmung des Ortes, dem ein in Bewegung gesetzter Körper sich zuwendet."[3])

---

[1]) Wenn auch Frantz in dem ersten Zitate wieder eine Musterleistung philosophischer Narretei liefert, so steckt doch in der Anmerkung ein gesunder Kern, der allerdings auch erst aus rauher Schale herausgeholt werden mufs.

[2]) Hier wird wieder Gerade und Strahl verwechselt. Im übrigen kann man den Ausführungen zustimmen, wenn man davon absieht, dafs auch Koch auf dem Standpunkte steht, dafs er nur der werdenden Linie Richtung zugesteht. Man vergl. unsere Bemerkungen zu Hoffmanns Aufsatz.

[3]) Damit ist das Setzen eines zweiten Punktes gemeint. Übrigens mufs dieser Ort vorhanden sein, ehe der Körper sich in Bewegung ge-

p. 20: „Der Richtung nach giebt es gerade und krumme Linien.“[1])

Salomon, Lehrbuch der reinen Elementar-Geometrie. — Wien 1847.

p. 7: „Es ist einleuchtend, daſs ein beweglicher Punkt unendlich viele verschiedene Linien beschreiben könne, die sämtlich einerlei Anfangspunkt haben.“

„Der als notwendig erscheinende Weg, welchen jener bewegliche Punkt zu nehmen hat, heiſst Richtung, und bleibt diese während der ganzen Dauer der Bewegung unverändert, so heiſst die beschriebene Linie gerade.“[2])

Waitz, Lehrbuch der Psychologie. — Braunschweig 1849.

p. 225: „Die natürliche Augenbewegung ist stets die gerade oder vielmehr wir nennen gerade, was die Richtung der natürlichen Augenbewegung hat.“[3])

---

setzt hat oder wenigstens in dem Moment, wo er sich in Bewegung setzt. Eine weitere Frage ist, ob überhaupt diese Erklärung ausgesprochen werden darf. Durch Bestimmung eines Ortes ist zwar die Richtung bestimmt, aber nicht umgekehrt ist auch durch die Richtung der Ort bestimmt; dazu gehört dann noch eine zweite Bedingung, ein gewisser Abstand. Genau genommen müſste also die Erklärung umgestellt werden.

[1]) Eine völlig unzutreffende Erklärung ohne jeglichen Sinn.

[2]) Eine höchst eigentümliche Erklärung: „Der als notwendig erscheinende Weg heiſst Richtung“. Ich muſs gestehen, daſs es mir nicht gelungen ist, in das Verständnis dieser Worte einzudringen, besonders wenn man noch die folgenden Worte in Betracht zieht. Fehlten diese Worte, so könnte man unter der als notwendig erscheinenden Linie die Gerade selbst — in einer gewissen apriorischen Auffassung — verstehen. Aber dies wird durch den Zusatz völlig ausgeschlossen.

[3]) Diese Erklärung leidet an dem Fehler, daſs nicht deutlicher ausgesprochen ist, was unter der „natürlichen Augenbewegung“ gemeint ist. Ist die Bewegung der Augen selbst gemeint, so ist die Erklärung falsch. Wir glauben aber, daſs es so verstanden werden müsse: Wenn wir unsere Augen von einem Punkte auf einen andern richten, so thun wir dies entlang der durch die beiden Punkte bestimmten Geraden. Hier würde nun der zweite Satz von besonderem Werte sein, daſs wir

„Ferner liegt im Obigen sowohl der Grund davon, dafs es nur eine Art der geraden, aber unendlich viele Arten der krummen Linie giebt, als auch der Grund des Satzes, dafs die gerade Linie durch zwei Punkte bestimmt ist; denn sie ist diejenige, welche das Auge, von einem seitlichen Reize angezogen, beschreibt, wenn es nicht gestört wird. Der Reiz selbst ist hierbei der zweite bestimmende Punkt.“[1])

p. 226: „Die gerade Linie giebt zugleich die Vorstellung der Richtung, denn sie ist selbst die Richtung, in welcher das Auge sich bewegt beim Übergange von einem Punkte zum andern.“[2]) „Wie die Richtung ist auch die Länge unmittelbar mit der Vorstellung der Linie gegeben. Durch Länge und Richtung ist die Linie als solche bestimmt.“[3])

Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie. — Jena 1851. — Vergl. Band I. p. 347.

p. 4: „Liegen mehrere Punkte aufsereinander, so kann blofs von der Ordnung, in welcher sie aufgefafst werden sollen oder können, die Rede sein.“

p. 5: „Sobald wir zwei Punkte A, B auf einander beziehen, so stellen wir uns die Entfernung zwischen beiden vor, d. h. wir haben es mit einer Dimension, d. h. mit der Linie zu thun.“

Ergänzend:

p. 7: „Insofern die Gerade Richtung ist, steht ihr die krumme Linie als Nichtrichtung gegenüber.“[4])

---

das gerade nennen, was dieser Richtung, resp. diesem Wege entspricht. Eine Erklärung von Richtung enthält der Satz aber nur, wenn man ihn in unserer Fassung ausspricht.

[1]) Hiermit kann man sich durchaus einverstanden erklären. Man sieht, dafs die psychologische Erklärung die natürlichste ist.

[2]) Man vergl. unsere erste Anmerkung zu diesem Zitat.

[3]) Hier liegt also auch die Erkenntnis der doppelten Wesenheit der Linie, nach Quantität und Qualität, vor.

[4]) Diese, sowie die folgenden, Worte sind unklar; erstens ist die Gerade nicht Richtung, sondern man kann höchstens sagen, die Gerade hat Richtung, besser noch in der Geraden (resp. im Strahl) kommt die Richtung zur Anschauung; zweitens: was bedeutet das Wort „Nichtrichtung“?

„Der Unterschied von gerad und krumm liegt in der Richtung."[1])

August, E. F., Lehrbuch der Mathematik. — Berlin 1852.

p. 9: 4. Geometrische Grundsätze.

IV. „Zwei verschiedene gerade Linien können sich nur in einem Punkte schneiden."

„Anm. Wenn zwei gerade Linien in verschiedener Richtung gehen, so liegen jederzeit die Abschnitte der einen auf verschiedenen Seiten der andern. Man drückt dies dadurch aus, dafs man sagt: die Linien durchschneiden sich in diesem Punkte. Hätten sie aufser einem Durchschnittspunkte noch einen zweiten, so wären es nicht verschiedene Linien (I. Grundsatz)."

Fresenius, Die Raumlehre eine Grammatik der Natur. — Frankfurt a/M. 1853.

p. 34: „Der Punkt hatte keine Richtung. Sobald er aber anfing sich zu bewegen, mufste er eine bestimmte Richtung einschlagen. Vorher hatte er die Wahl zwischen unzähligen."

Snell, Lehrbuch der Geometrie. — Leipzig 1857 (erste Auflage 1841).

p. 17: „Die gerade Linie hat nur zwei Eigenschaften, welche einer näheren Bestimmung fähig sind, nämlich Länge und Richtung.[2]) Wir fragen also, wodurch werden beide,

---

[1]) Diese Erklärung müfste lauten: der Unterschied von gerad und krumm liegt in der verschiedenen Auffassung des Begriffes Richtung; aber dann würde sie idem per idem erklären.

[2]) Auch Snell fafst also die Gerade in doppelter Beziehung, qualitativ und quantitativ. In den folgenden Ausführungen stellt nun Snell die Gerade als etwas Fertiges, für sich Bestehendes in Vergleich mit der Richtung, wobei noch die Ungenauigkeit unterläuft, dafs an Stelle der Geraden eine Strecke — *ab* — betrachtet wird. Die Betrachtungen würden durchsichtiger sein, wenn von dieser Strecke ganz abgesehen worden wäre. Dann würde auch Snell mit dem von uns gefundenen Resultat übereinstimmen, dafs durch das Setzen eines zweiten Punktes

Länge und Richtung bestimmt. Die Richtung einer geraden Linie ist noch nicht bestimmt, wenn Ein Punkt vorgeschrieben ist, durch welchen die gerade Linie gehen soll. Denn denken wir uns, dafs die Linie *ab* nach Vorschrift durch den Punkt *c* gehen sollte, so kann dieselbe, ohne diesen Punkt *c* zu verlassen, noch alle möglichen Richtungen einschlagen (*c* liegt auf *ab*), indem sie sich um diesen Punkt *c* herumdreht.... Nehmen wir aber aufser dem Punkte *c* noch einen zweiten Punkt *f* an, durch welchen die Linie gehen soll, so wird die um den Punkt *c* herumgedrehte Linie nur in einer ganz bestimmten Lage zugleich durch den vorgeschriebenen Punkt *f* gehen und folglich durch zwei Punkte die Lage und mithin auch die Richtung einer geraden Linie vollkommen bestimmt sein."

Ley, Lehrbuch der Geometrie. — Bonn 1858.

p. 5: „Die Linien von einem Punkte zu einem andern heifsen die Wege oder Richtungen von dem ersten zum zweiten."[1])

p. 6: „Es giebt also unendlich viele Richtungen von einem Punkte zu einem zweiten."[2])

„Dreht man eine durch eine Linie begrenzte Fläche so um diese herum, dafs irgend zwei in jener Linie angenommene Punkte in sich liegen bleiben und es bleiben alsdann auch alle übrigen Punkte der Linie in sich liegen, so heifst die Richtung dieser Linie eine unveränderte."[3])

Richtung — und zwar eine bestimmte — in Evidenz tritt. Durch das Hineinziehen der Geraden in die Betrachtungen mischt sich in die Untersuchung der Begriff der Lage, was zur Klarheit nicht gerade beiträgt.

[1]) Diese Erklärung dürfte wohl einzig in ihrer Art sein.

[2]) Die in diesen Worten ausgesprochene Konsequenz aus dem ersten Satze ist derartig, dafs eine Widerlegung im Ernst wohl kaum nötig sein dürfte.

[3]) Auch diese Erklärung leidet an Künstelei. Die Fläche ist doch völlig überflüssig. In Übereinstimmung allerdings mit seinen vorigen Erklärungen, im Widerspruch aber mit dem Begriff Richtung an sich konstruiert Verfasser erst eine unveränderte Richtung; wir glauben

v. Heidenreich, Die Elemente der niedr. Geometrie. — Leipzig 1859.

p. 1: „Will man, wie es wohl geschieht, die gerade Linie als eine solche erklären, deren Teile alle in derselben Richtung liegen, so wird der Begriff der Richtung vorausgesetzt, der im wesentlichen mit dem der geraden Linie zusammenfällt, nur dadurch von ihr sich unterscheidet, dafs bei der Richtung das Woher und das Wohin angegeben wird, bei der geraden Linie nicht, der man daher zwei Richtungen beilegen kann, von A nach B oder von B nach A.“[1])

Bartholomäi, Philos. d. Math. — Jena 1860.

p. 12: „Der Raum ist zunächst das Aufsereinander, d. h. er wird gedacht bei getrennten Dingen, er ist also eine Form der Zusammenfassung. Die räumlich zusammengefafsten Dinge haben gar keine Gemeinschaft und keine Beziehung zu einander, diese wird ihnen vielmehr erst durch das zusammenfassende Denken geliehen. Wenn wir nun zwei Dinge zusammenfassen, so geht das Vorstellen von dem einen nach dem andern hin und zurück, es mufs sich also bei der Auffassung der Dinge notwendig der Begriff der Richtung erzeugen, denn Richtung ist Fortschritt oder Übergang an sich, d. h. ohne Nebenbestimmung.“[2])

(Dann kommt die Erörterung des Abstandes, s. w. unten.)

---

nachgewiesen zu haben, dafs Richtung und Veränderlichkeit zwei sich völlig ausschliefsende Begriffe sind. Richtung an sich ist eben unveränderlich. Man kann seine Richtung ändern, d. h. eine andere Richtung einschlagen, nicht aber kann man Richtung ändern.

[1]) Die Angabe des Woher und Wohin, das ist das Setzen zweier Punkte.

[2]) Mit andern Worten sagt hier Bartholomäi, was wir als unmittelbaren resp. a priori sich einstellenden Begriff (Vorstellung) bezeichnet haben und was Bolzano als ein Prädikat bezeichnet, das beim Setzen zweier Punkte entspringt. Dadurch, dafs er die Entstehung des Begriffes ganz in das denkende Subjekt legt, zeigt Verfasser, wie sich der Begriff Richtung erzeugt, kann ihn aber selbstverständlich nicht unabhängig machen von den zwei Objekten, als die wir Punkte setzten, während Bartholomäi dafür den vagen Ausdruck Dinge gebraucht. Die Erzeugung des Begriffes Richtung ist nichts anderes, als was wir eine unmittelbare Existenz bei dem Setzen zweier Punkte genannt haben.

Sonndorfer, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1865.

p. 9: „Der sich bewegende Punkt mufs offenbar von jener Stelle des Raumes, wo er sich befindet, sich zu einem andern Orte des Raumes begeben, d. h. er mufs in irgend einer Richtung weitergehen."

Teirich, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1868.

p. 4: „Die einfachste unter den Linien ist die gerade, welche eine von einem Punkte ausgehende Richtung angiebt."[1]) . . .

p. 5: „Lage einer geraden Linie und Richtung derselben bedeuten zwar gewöhnlich einerlei; man kann aber die Richtung der Linie von einem ihrer Punkte nach einem zweiten oder von dem letzteren nach dem ersten hin betrachten."[2])

Fresenius, Die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft. — Wiesbaden 1868.

Geradlinige Bewegung, unzähligemal im Bewufstsein vollzogen, hinterliefs eine unverlöschliche Spur und existiert als selbständige Idee des ziellosen[3]) Hinauszu.

„Der Richtungsbegriff ist kein Gröfsenbegriff, aber dem Bewufstsein ebenso klar, so sicher und so ursprünglich als der der Gröfse."

Adam, W., Lehrbuch d. eb. u. körp. Geometrie. — Berlin, Stubenrauch 1869.

„Die Begriffe Richtung und gerade Linie sind gleichbedeutend."

---

[1]) Das ist der Strahl, nicht die Gerade.

[2]) Hierdurch kommt Teirich mit den ersten Worten in Widerspruch, was er vermieden hätte, wenn Strahl und Gerade unterschieden worden wären. Über den Zusammenhang resp. den Unterschied von Lage und Richtung einer Geraden vergl. Kap. V Geometrische Hilfsbegriffe.

[3]) Diesen Ausdruck mufs ich bestreiten; mir ist es undenkbar, dafs man ein „Hinauszu" sich vorstellt ohne ein bestimmtes Ziel. Ein „zielloses Hinauszu" würde eine unbestimmte Vorstellung sein, die es doch nicht giebt.

Unterscheidung in senkrechte (lotrechte, perpendikuläre, vertikale), wagerechte (horizontale, wasserrechte) und schräge (schiefe) Richtung.

„Die schräge Richtung ist eine unbestimmte, indem sie, wie leicht nachgewiesen ist, gar verschiedenartig ausfallen kann. Die senkrechte und wagerechte Richtung sind bestimmt und unveränderlich und heifsen daher Grund-, Haupt- oder Normal-Richtungen."[1])

E. Müller, Elemente der Geometrie. — Braunschweig 1869.

p. 15: „Das, wodurch sich die Strahlen eines Büschels von einander unterscheiden, heifst ihre Richtung."

p. 16: „Da sich nun aber alle Strahlen oder Geraden, die durch einen Punkt gelegt werden, nur durch ihre Richtung unterscheiden, so bestimmt der zweite Punkt jedesmal auch die Richtung der durch den ersten Punkt gelegten Geraden."

Beez, Die Elemente der Geometrie.[2]) — Plauen 1869.

Brockmann, Lehrb. d. Elem.-Geometrie. — Leipzig 1871.

p. 4: „Der von selbst geg. Begriff der geraden Linie schliefst den der Richtung in sich."

Joh. Müller, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Bremen 1870.

---

[1]) Die Auseinandersetzungen Adams beschäftigen sich gar nicht mit dem reinen Begriff Richtung, sondern mit den im gewöhnlichen Leben üblichen Anwendungen dieses Begriffes. Die Erklärungen sind daher eigentlich weder mathematisch noch philosophisch, sondern nur praktisch (im Gegensatz zu theoretisch).

[2]) Nichts über Richtung. — Die verschiedenen französischen Lehrbücher bringen übrigens ebenfalls darüber nichts oder identifizieren Richtung und Gerade völlig, wie es auch in dem folgenden Zitat geschieht.

p. 1: „Raumgebilde heifsen alle Vorstellungen, welche sich aus den drei einfachen Grundvorstellungen

des Raumes
des Ortes
der Richtung[1])

ohne Hinzuziehung anderer Grundvorstellungen ableiten lassen. ... Die Vorstellungen des Ortes und der Richtung sind der Veränderung fähig. Die Veränderung dieser Vorstellungen heifst Bewegung. ... Die Veränderung der Richtung wird Drehung genannt."[2])

A. Dauber, Die Grundlagen der Mathematik. — Helmstedt 1871.

„Die verschiedenen Geraden können quantitativ gleich sein, der Unterschied der Lage besteht also nur in qualitativer Beziehung."[3])

„Dieser qualitative Unterschied heifst ihre Richtung."

„Die Richtung besteht aber auch als blofse Möglichkeit, ohne in der Geraden anschaulich realisiert zu sein."[4])

---

[1]) Dafs die Richtung als einfache Grundvorstellung erklärt wird, stimmt wohl mit unsern Ausführungen überein.

[2]) Schon bei den Worten: „Die Vorstellungen des Ortes und der Richtung sind der Veränderung fähig" müssen wir an unsern im Text betonten Standpunkt erinnern und aufs festeste betonen, dafs wir die Richtigkeit dieser Worte nur dann anerkennen, wenn sie in unserem Sinne aufgefafst werden. Aber auch die letzten Worte „die Veränderung der Richtung wird Drehung genannt" sind nur mit grofser Vorsicht aufzunehmen, da sich leicht fehlerhafte Vorstellungen damit verbinden lassen.

[3]) Eine Gerade in bestimmter quantitativer Auffassung heifst Strecke. Strecken können natürlich gleich und ungleich sein. Qualitativ sind unserer Ansicht nach alle Geraden gleich, d. h. es resultiert eben der Begriff: die Gerade. Dazu kommt als neues unterscheidendes Merkmal die Lage. — Doch dürfte wohl auch die hier vorgebrachte Erklärung, besonders in Rücksicht auf die folgenden Worte, bei Manchen Anerkennung finden.

[4]) Dies stimmt mit unserer Ansicht überein, dafs Richtung ohne Gerade existiert, dafs Richtung erst in der Geraden zur anschaulichen Vorstellung wird, durch die Gerade in die Anschauung tritt.

Hartmann, Genetischer Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie. — Bautzen 1872.

p. 1: „Richtung und Gröfse, die zwei Eigenschaften der geraden Linie, welche die Geometrie zu untersuchen hat.“[1])

p. 2: „Jede bestimmte Richtung einer Geraden nennen wir Lage.“

Stumpf, Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung. — Leipzig 1873.

Im I. Kapitel, § 3, II, das davon handelt, dafs Bewegungsgefühle von Tastgefühlen fast immer begleitet sind, heifst es p. 45: „Richtung ist durch die Verschiedenheit der angewandten Muskeln eines Gliedes gegeben; als Mafs, worauf die Richtungen bezogen werden, nehmen wir am natürlichsten den eigenen Körper, daher die Dimensionen.“

Baltzer, Elemente.[2]) — Leipzig 1874.

p. 3: „Die einfachste unter den Linien ist die Gerade, welche eine von einem Punkte ausgehende Richtung (und die entgegengesetzte) angiebt . . .“

p. 4: „Der Begriff der Geraden ist vermöge seiner Einfachheit nicht definierbar, Richtung ohne die Gerade unverständlich.“[3])

Hoffmann, Vorschule der Geometrie. — Halle a/S. 1874.

p. 19: „Der bewegte Punkt strebt während der Bewegung einem Ziele *B* zu und hat dieses Ziel sozusagen stets im Auge. Dieses Streben und Festhalten (Fixieren) des Zieles, dieses unverwandte Hinsehen aufs Ziel heifst Richtung.“[4])

Helmes, Die Elementarmathematik etc. — Hannover 1874.

---

[1]) Auch hier also finden wir die Hervorhebung der doppelten Wesenheit der Geraden, ohne deren Berücksichtigung eine tiefer gehende Betrachtung der Geraden nicht möglich ist.

[2]) Vergl. Band I. p. 310.

[3]) Vergl. Band I. p. 310.

[4]) Man vergl. unsere Bemerkungen zu Hoffmanns im Text ausführlich behandeltem Aufsatz.

p. 5: „Die Ursprünglichkeit und Gemeinsamkeit der Vorstellung von der geraden Linie beruht auf den gleich ursprünglichen und gemeinsamen Vorstellungen der Richtung und der Entfernung von einem Punkte im Raume nach einem andern, als deren Ausdruck und räumliche Darstellung wir uns eben die gerade Linie zwischen diesen beiden Punkten denken.“[1])

„Die Richtung und demgemäfs die gerade Linie wird uns vorgezeichnet durch den Weg, den das Licht von einem ins Auge gefafsten Punkte nach diesem Auge nimmt, natürlich denselben und den einzigen Weg, auf welchem umgekehrt das Auge von einer Stelle im Raume aus zu diesem Punkte gelangt. (Beispiel vom Fixieren.) Richtung oder gerade Linie von einem Punkte nach einem andern ist danach der Weg, auf welchem das Auge von dem einen zu dem andern geführt wird, indem es dabei immer den Stellen oder den Punkten folgt, von denen ihm der Eindruck des Lichtes zukommt. Auch der Weg des fallenden Körpers, der Faden, an welchem ein Gewicht hängt, begründet und befestigt diese gemeinsame Vorstellung von gerader Linie und Richtung.“[2])

Worpitzky, Elemente der Mathematik III. — Berlin 1874.

p. 8: „Jeder Teil einer Geraden, welcher nur einen bestimmten Endpunkt hat, heifst ein Strahl, eine Halbgerade oder Richtung[3]); das letztere vermutlich, wenn man sich vorstellt, dafs die Ausdehnung der Geraden am andern Ende zunimmt.“

Wagner, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Hamburg 1874.

[1]) Diese Ausführungen stimmen im wesentlichen mit den unsrigen überein. Genauer wäre noch für den Ausdruck der Richtung der Strahl, für den der Entfernung (des Abstandes) die Strecke zu nennen gewesen. Doch findet sich ja Beides in der Geraden, sobald man sie in bestimmter Rücksicht auffafst.

[2]) Die verschiedenen Veranschaulichungsmittel, die in diesem Absatze geboten werden, können recht wohl im Unterricht Verwendung finden.

[3]) Besser müfste es heifsen, dafs die Richtung im Strahl ihre Veranschaulichung findet; der folgende Zusatz erscheint nicht recht verständlich.

p. 3: „Die Lage, welche ein Punkt in Bezug auf einen gegebenen Nachbarpunkt einnimmt, nennt man eine Richtung zu demselben.“

„Um dies zu verstehen, mufs man Folgendes beachten: Um einen gegebenen Punkt als Hauptpunkt kann man sich eine unendlich grofse Zahl von unmittelbar angrenzenden oder Nachbarpunkten liegend denken. Jeder dieser Punkte wird in Bezug auf den Hauptpunkt eine andere Lage haben und durch diese seine Lage (seine Richtung) von irgend einem der übrigen Punkte unterschieden sein. Nur ein Punkt von besonderer Bedeutung existiert noch; es ist derjenige, zu welchem der Hauptpunkt dieselbe Richtung besitzt, wie der besprochene zum Hauptpunkte. Von je zwei solchen Nachbarpunkten des Hauptpunktes sagt man, sie haben entgegengesetzte Richtung zu demselben. Geht man daher von einem zweier entgegengesetzt gerichteter Punkte zum Hauptpunkt über, dann von diesem zum andern, so behält man dieselbe Richtung bei. Geht man aber von einem beliebigen Nachbarpunkte des Hauptpunktes zu einem beliebigen andern Nachbarpunkte über, so ändert man die Richtung; man nennt diesen Übergang Drehung um den Hauptpunkt.“[1])

Halblüzel, Lehrbuch der synthetischen Geometrie. — Leipzig 1875.

p. 3 Anmerkung: „Der Begriff einer geraden Linie wird nicht selten mit demjenigen der Richtung verwechselt, obschon man beide Ausdrücke nicht für gleichbedeutend nehmen darf. Wird z. B. eine Gerade (ab), in welcher man sich einen fixen Punkt (c) denkt, um denselben gedreht, so ändert die Linie lediglich ihre Richtung, nicht aber ihre Eigenschaft und bleibt

[1]) Die Ausführungen Wagners zeichnen sich durch Originalität aus. Nur ist einzuwenden, dafs Wagner einseitig nur von der Richtung spricht, ohne ausdrücklich hervorzuheben, dafs er unter Nachbarpunkten solche versteht, die von dem Hauptpunkte gleichen Abstand haben. Ferner ist bei der Benutzung des ungemein fruchtbaren Begriffs der Nachbarschaft zu unterscheiden zwischen endlich und unendlich benachbarten Punkten. Erst bei dieser genauen Auseinanderhaltung wird man den Begriff in seinem ganzen Vorteil kennen lernen. An anderer Stelle werde ich hierauf genauer eingehen.

diese immer die gleiche, während jene sich unendlich verändern läſst.[1]) — Der Begriff der Richtung setzt denjenigen einer geraden Linie voraus."[2])

Fabian-Zmurko, Lehrb. der Geometrie. — Lemberg 1876.

p. 18: „Die Lage einer Geraden wird ihre Richtung genannt."

Becker, J. K., Lehrb. d. Elem.-Math. — Berlin 1877.

p. 6: „Sieht man von einem Punkte aus nach einem andern Punkte, so sieht man ihn in einer bestimmten Richtung (nach rechts, links, oben, unten, Osten, Westen u. s. w.) und man sagt, der beobachtete Punkt liege von dem Punkte aus, von dem man ihn sieht, in dieser Richtung."

„Sieht man dagegen von dem beobachteten Punkte aus nach dem Punkte zurück, von welchem man ihn beobachtet hatte, so sieht man nach der entgegengesetzten Richtung."

Gilles, Lehrb. der eb. Geometrie. — Heidelberg 1877.

p. 2: „Mit der Bewegung tritt die Richtung, die Beziehung der verschiedenen Lagen des erzeugenden Punktes zu einander, auf."[3])

Focke und Kraſs, Lehrb. der Geometrie. — Münster 1878.

p. 1: „Die gerade Linie bezeichnet die Richtung von einem Punkte zu einem andern."

Polster, Geometrie der Ebene. — Würzburg 1878.

„Eine unbegrenzte Gerade von bestimmter Art ihrer Lage und nach bestimmter Reihenordnung der in ihr liegenden Punkte heiſst Richtung."

---

[1]) Man vergl. das Zitat von Snell (S. 24).

[2]) Daſs wir hiermit nicht übereinstimmen, geht aus unsern gesamten Ausführungen klar hervor.

[3]) Damit ist die Richtung als die unmittelbare Beziehung gekennzeichnet, die sich bei der Betrachtung zweier Punkte darbietet.

Zusätze.[1]) Jede Richtung hat von Punkt zu Punkt dieselbe Form.

Alle Richtungen sind unter sich kongruent.[2])

Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie.[3]) — Berlin 1878.

p. 68: „In dem Nacheinander als diskursiver Reihe lassen sich zwei verschiedene Beziehungsformen der Einzelglieder bestimmen; wir nennen dieselben Richtung der Reflexion, des Fortschrittes der Denkbewegung, nach vorwärts und nach rückwärts. Diese beiden Richtungen sind absolut einander entgegengesetzt."

p. 70: „Der Richtungsbegriff hat in der Weise, wie er hier gebildet und gebraucht worden, durchaus nichts Räumliches an sich."

p. 269: „Die Betrachtung des Inhaltes der Gebilde kann nun wiederum sich spalten in:

a) eine solche, welche nur die äufsern Beziehungen... (Gröfse)

b) Betrachtung der innern Beziehungen... Diese Betrachtung ist diejenige des Nebeneinander; und die innere Beziehung, welche zwischen den Elementen des Nebeneinander möglich ist, erhält dieser spezifischen Begriffskombination gemäfs den spezifischen Namen Richtung."[4])

Krause, Kant- und Helmholtz etc. — Lahr 1878.

[1]) Hier hätte man als ersten Zusatz erwarten dürfen, dafs durch die Reihenordnung zweier Punkte die Ordnung der Aufeinanderfolge für alle Punkte bestimmt sei.

[2]) Dieser Satz kann leicht mifsverstanden werden; auch ist er streng genommen nicht richtig. Nicht die Richtungen sind kongruent, sondern deren anschauliche Bilder, die Geraden.

[3]) Man vergl. Zeit und Raum etc. von Schmitz-Dumont (und die Bedeutung der Pangeometrie von demselben).

[4]) Die Unterscheidung in äufsere und innere Beziehungen, als deren Repräsentanten die Gröfse resp. die Richtung hingestellt werden, scheint uns gekünstelt. Auch ist absolut zu betonen, dafs Richtung ein räumlicher Begriff ist, der nur durch die Betrachtung des räumlichen Nebeneinander von Punkten (Elementen) gebildet wird.

p. 80: „Nehmen wir als erstes Beispiel die Begriffe von den Anschauungen „Richtung", „Lage", „Stellung" im Gegensatz zu „Linie", „Fläche", „Körper", so findet man, daſs man Linien, Flächen und Körper vergröſsern und verkleinern, Richtungen dagegen nicht vergröſsern kann. Richtungsunterschiede kann man vergröſsern, aber nicht Richtungen selbst; diese kann man nur verändern.[1]) Also kann der Begriff der Anschauung „Richtung" nicht unter den Begriff der Gröſse fallen. Vielleicht fällt er dann unter den Begriff Qualität oder Relation. Nun ist die Beziehung kenntlich daran, daſs sie stets ein Zweites voraussetzt, damit sie stattfinden kann, und bei der Richtung finden wir, daſs alles Gerichtete auf irgend etwas gerichtet sein müsse, daher zur Angabe der Richtung wenigstens zwei Punkte erfordert werden, während die Qualität ein solches Zweites nicht bedarf; also finden wir, daſs die Anschauung Richtung sich dem Begriffe der Beziehung unterordnen lasse.[2]) Die Richtung einer Linie wird durch ihre Beziehung zu andern ausdrückbar."

Schlegel, Lehrbuch der elementaren Mathematik. — Wolfenbüttel 1879.

p. 7: „Ein Punkt hat im Anfange seiner Ortsänderung die Auswahl unter einer unbeschränkten Menge von Bewegungen; das Unterscheidende dieser Bewegungen heiſst ihre Richtung.[3])

Behält der Punkt die zuerst gewählte Richtung bei, so

---

[1]) Während wir mit dem ersten Teile der Ausführungen uns völlig einverstanden erklären können, müssen wir diesem letzten Satze wiederum entschieden entgegentreten. Doch will Krause ja in der Hauptsache nur gegen die Auffassung des Richtungsbegriffes als eines quantitativen sprechen, wie aus dem folgenden „also" hervorgeht.

[2]) Mit vollem Rechte faſst Krause den Begriff Richtung als Relation auf. Nach unsern Ausführungen am Anfange dieses Paragraphen wird man verstehen, warum wir Relation und Qualität nicht streng geschieden haben, sondern hier diesen, dort jenen Begriff verwenden, ohne eine besondere Unterscheidung zu machen.

[3]) Dieselbe Erklärung findet sich in der Raumlehre. — Selbstverständlich das Unterscheidende nur in geometrischem Sinne genommen.

heiſst seine Bewegung einfach und die von ihm beschriebene Strecke gerade. — Das besondere Merkmal einer einfachen Bewegung eines Punktes ist also ihre Richtung."

Korneck, Genetische Behandlung des planimetrischen Pensums der Quarta. — Kempen 1879.

p. 10: „Sowie die Strecke als ein von einem Punkte bereits zurückgelegter geradliniger Weg von bestimmter Länge aufgefaſst wird, kann man eine gerade Linie auch als einen von einem bestimmten Punkte nach einem andern Punkte erst zurückzulegenden Weg von unbestimmter Länge ansehen, und in dieser Beziehung nennen wir die gerade Linie Richtung.[1])

Unter Richtung versteht man die von einem bestimmten Punkte (Anfangspunkt) nach einem andern Punkte (Zielpunkt) hinführende gerade Linie von unbestimmter Länge.[2])

Da man Anfangs- und Zielpunkt einer Richtung mit einander vertauschen kann, so enthält eine Gerade zwei einander entgegengesetzte Richtungen."

Beyersdorff, Die Raumvorstellungen. — In. Diss. Leipzig (ohne Jahr, wahrscheinlich um 1880).

p. 41: „Ist die gerade Linie in der Anschauung völlig klar, so verbindet sich mit ihr der Begriff der Richtung, die wir uns ja nur denken können als eine von einem Punkte ausgehende gerade Linie."

Henrici und Treutlein, Lehrbuch d. Elementar-Geometrie. — Leipzig 1881.

p. 3: „Wählt man auf einer Geraden einen Punkt A als Ausgang, einen andern B als Ziel einer Bewegung, so wird

---

[1]) Auch hier muſste wiederum an Stelle der Geraden der Strahl gesetzt werden.

[2]) Wir würden umgekehrt sagen: In der von einem bestimmten Punkte (Anfangspunkt) nach einem andern Punkte (Zielpunkt) hinführenden Linie kommt die Richtung vom einen nach dem andern Punkte zur Anschauung. Ebenso die vom zweiten nach dem ersten Punkte. Daher haben wir bei einer Geraden zwei — und zwar einander entgegengesetzte — Richtungen.

durch diese fortschreitende Bewegung eine Richtung bestimmt und nur im Gedanken an diese Bewegung eines Punktes spricht man auch von der Richtung einer Geraden. Da aber Ausgang und Ziel auch vertauscht werden können, so hat man in der Geraden einen Richtungsgegensatz, einen zweifachen Richtungssinn oder zwei Richtungen zu unterscheiden; die eine heifst Gegenrichtung der andern."

Schindler, die Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883.

p. 6: „Richtung heifst die räumliche Beziehung zwischen zwei Punkten."

„Durch 2 Punkte sind stets zwei entgegengesetzte Richtungen bestimmt."

„Eine Richtung ist durch 2 Punkte bestimmt. Die Ausdehnung der Richtung wird wie ein gestreckter, gerader Faden wahrgenommen."[1])

Hoch, Lehrbuch der eb. Geometrie. — Halle 1884.

p. 2: „Ein Punkt hat bei dem Beginn seiner Bewegung die Auswahl unter einer unendlichen Menge von Bewegungen. Das die unendlich vielen Bewegungen Unterscheidende heifst Richtung. Die entgegengesetzte Richtung ist jene, welche angiebt, wie man von dem bei der Bewegung erreichten Punkte wieder zurückkommen könnte zum Ausgangspunkte.

Von der entgegengesetzten Richtung wohl zu unterscheiden ist die Bedeutung der verschiedenen Richtung."

Recknagel, Ebene Geometrie. — München 1885.

p. 7: „Unter Richtung von einem Punkte 1 nach einem Punkte 2 versteht man den von 1 über 2 ins Unendliche gehenden Strahl. Von einem dritten Punkte sagt man: „Er liegt in dieser Richtung", wenn er in dem eben definierten Strahle liegt."

F. Fischer, Anfangsgründe der Math. II. — Leipzig 1887.

---

[1]) Während wir mit den ersten Sätzen des Verfassers völlig übereinstimmen, scheint uns der Ausdruck „Ausdehnung der Richtung" recht unglücklich gewählt.

p. 3: „Die Gerade ist durch zwei Punkte, da sie ihre Richtung unzweideutig festsetzen, vollkommen bestimmt."

Rausenberger, Die Elementargeometrie etc. — Leipzig 1887.

p. 8: „Während die erstere Definition auf den Begriff der Richtung zurückgeht, der selbst erst mit Hilfe der Geraden festgestellt werden kann, . . ."

Beez, Über Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie. — Plauen 1888.

p. 8: „Um die Schwierigkeiten, welche sich einer Definition der Geraden entgegenstellen, zu heben, hat man in neuerer Zeit den Begriff der Richtung zu Hilfe genommen . . . — Ob der Begriff Richtung aber ein so klarer und präziser ist, daſs man durch ihn den Begriff Gerade deutlich erklären könne, ist mir sehr fraglich. Wundt faſst allerdings den Begriff Richtung als den allgemeinern, Gerade als den speziellern, Helmholtz jedoch umgekehrt den der Geraden als den allgemeinern auf, da in ihm sich zwei entgegengesetzte Richtungen unterscheiden lassen."[1])

„Will man aber angeben, daſs ein Punkt auf dem kürzesten Wege sich nach einem andern Punkte bewegen solle, so sagt man ausdrücklich, er bewegt sich in „gerader Richtung" nach demselben. Also Richtung definiert nicht die Gerade, sondern umgekehrt die Gerade eine bestimmte Richtung."[2])

„Da sich Richtung nicht vergröſsern oder verkleinern läſst, so fällt der Begriff Richtung nicht unter die Kategorie „Gröſse", speziell Raumgröſse, sondern, weil das Gerichtete auf etwas gerichtet sein muſs, unter die Kategorie „Relation"."[3])

---

[1]) Beez spricht dann ausführlich über den verschiedenen Gebrauch der Richtung: nördliche Richtung, Richtung des Uhrzeigers u. s. f. (dafür besser im Sinne des Uhrzeigers).

[2]) Beez würde nicht auf diesen Ausweg, der keiner ist, verfallen sein, wenn er sich die Frage gestellt hätte, was man wohl unter „schiefer Richtung" verstehen müsse. „Gerade Richtung" ist ein volkstümlicher Pleonasmus, weiter nichts; dieser Ausdruck kann nicht als Beweis dafür angezogen werden, daſs Richtung durch Gerade definiert werde.

[3]) Hierin der innere Grund gegen die obigen Bemerkungen von Beez.

Es wird dann Schlömilchs Versuch mit dem Dorfjungen angegeben, durch den auch die Priorität der Richtung vor der Geraden verdeutlicht wird, was Beez aber nicht anerkennt.

Schram und Schüssler, Vorschule der Mathematik. — Wien 1889.

p. 122: „Von einem Punkte können unzählig viele Gerade ausgehen; alle diese Geraden haben verschiedene Richtungen."

Zindler, Beiträge zur Theorie der mathematischen Erkenntnis. — Wien 1889.

p. 3: „Wenn wir uns nach den geometrischen Grundvorstellungen umsehen, so . . ., sondern es giebt hier mehrere auf einander nicht zurückführbare und undefinierbare Fundamentalvorstellungen.[1]) Als solche müssen z. B. die Richtung . . . etc. angesehen werden."

Raschig, Erkenntnistheoretische Einleitung in die Geometrie. — Schneeberg 1890.

Auf Seite 21 wird gegen Wundts (Logik S. 450 ff.) Definitionen polemisiert, wobei Verfasser sagt:

„Dann ist der in (Definition) 1) und 4) auftretende Begriff der Richtung einfacher auf den Begriff der Geraden als den grundlegenden zu beziehen."

Seite 31 heifst es: „Denkt man auf einer unbegrenzten Geraden einen beweglichen Punkt fortschreitend, so dafs er zuerst nach dem Bestimmungspunkt A und dann nach dem Bestimmungspunkt B gelangt, so fafst man hiermit die Gerade als Richtung auf und zwar als die Bestimmung der Richtung, in welcher vom Punkte A aus der Punkt B liegt; da nun etc. . . . d. h.: Jede Gerade bedeutet zwei einander entgegengesetzte Richtungen im Raume."

---

v. Schmidt, Euklids 11. Axiom. — Moskau 1891.

p. 9: „Eine Linie kann bezüglich gedacht werden; eine bezüglich gedachte Linie heifst Richtung."[2])

---

[1]) Vorstellungen a priori.

[2]) Wir müssen offen gestehen, dafs uns der Sinn dieser Erklärung nicht klar geworden ist.

M. Simon, Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie. — Strafsburg 1891.

p. 11: „Richtung wird uns am geläufigsten durch den Blick, den Lichtstrahl und durch das Senkblei, durchs Zeigen u. s. w. Auch ohne Tasten und Sehen würde der geotropische Nervenreiz die senkrechte Richtung geben. Abstand und Richtung, wie sie die geläufigsten, sind sie auch vielleicht die tiefstliegenden Begriffe, fast so tief wie die Kausalität. Der zweite Punkt (Ort) wirkt durch sein blofses Auftreten und hat Abstand und Richtung zur Folge.“[1])

„Richtung bedarf zu ihrer Fixierung zwar nicht, wie Mauritius meint, einer bestimmten Geraden, wohl aber einer bestimmten Reihenfolge. Sie hängt auf das innigste mit dem Willensakte, der von 1 zu 2 übergehen läfst, mit dem etwaigen Innervationsgefühl zusammen, ja sie scheint mit dem Willen selbst untrennbar verbunden und nicht blofs, weil Bewegung ohne Richtung nicht denkbar, sondern in ihrem innersten Wesen liegt eine Bewegungsempfindung. Dabei ist auch ein gewisses zeitliches Moment zu betonen; fasse ich zwei Punkte zugleich auf, so erhalte ich sofort den Abstand, und dies ist der innere Grund, weshalb AB gleich BA ist; fasse ich die Punkte nach einander auf, so erhalte ich die Richtung, und da zeitlich AB das Entgegengesetzte von BA ist, so giebt sich dieser Gegensatz auch in der Richtung kund.“

„Im Wesen der Richtung, welche im Losreifsen von 1 und Übergehen auf 2 besteht, liegt ausschliefslich die Gleichmäfsigkeit, und wenn wir die Gerade nicht hätten, würde kein Mensch Anstofs nehmen, den Kreis eine Linie zu nennen, die in allen ihren Teilen dieselbe Richtung hat.“

---

§ 2. Abstand.

Während sich dem Begriffe der Richtung, wie wir gesehen haben, das vielfältige Interesse der Geometrie zugewendet

[1]) Diese Ausführungen stimmen völlig mit den unsrigen überein, wie wir sie auch schon im ersten Bande dieses Werkes ausgesprochen haben.

und durch eine Reihe besonderer Arbeiten bethätigt hat, liegen über den Schwesterbegriff Abstand keine derartigen Arbeiten vor. Selbst in den Lehrbüchern ist er meist mit Stillschweigen übergangen. Offenbar hat man in früheren Zeiten diesen Begriff als einen quantitativen einer Erläuterung überhaupt nicht für bedürftig gehalten, Abstand direkt als eine Gröfse angesehen, wie die Zahlen, mit der sich ohne weiteres operieren lasse. Erst die Untersuchungen der neuesten Geometrie haben sich auch mit diesem Begriffe beschäftigt, aber seltsamerweise hat sich hier das Verhältnis umgekehrt: während die ursprüngliche Vorstellung der Richtung nicht angezweifelt wird, erfährt dieselbe Auffassung des Begriffes Abstand entrüstete Zurückweisung. Dafs gerade in der Beurteilung dieser Frage das entscheidende Moment für die Beurteilung der metageometrischen Deutungen liege, werde ich an anderer Stelle nachzuweisen suchen.[1]) Hier genügt es mit Bestimmtheit auszusprechen, dafs Richtung und Abstand völlig gleichwertige Begriffe sind in metaphysischer Hinsicht; im selben Moment, wo der Begriff der Richtung bei der Betrachtung zweier Punkte zum Bewufstsein kommt (entspringt, wie Bolzano sagt), entsteht auch der Begriff der kürzesten Entfernung,[2])

[1]) Um die Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, legt F. Klein — Math. Annalen IV — eine gerade Linie durch sie. Diese schneidet die Fundamentalfläche in zwei weiteren Punkten, die mit den gegebenen ein gewisses Doppelverhältnis besitzen. Den mit einer willkürlichen, aber fest gewählten Konstanten c multiplizierten Logarithmus dieses Doppelverhältnisses bezeichnet Klein als die Entfernung der beiden Punkte. — Es wird also die Gerade zur Definition der Entfernung benutzt, während sie doch auf dem Begriffe der Entfernung fufst; es werden Strecken — bei dem Doppelverhältnis — verwendet. In welchem Verhältnis stehen diese Strecken zum Begriffe der Entfernung? Die Fundamentalfläche selbst ist ferner ebenfalls ein Gebilde unseres Raumes. — Ist die angenommene Gerade eine Euklidische?

[2]) Zu diesem Begriffe findet sich in Kerry, System einer Theorie der Grenzbegriffe, folgende Bemerkung:

p. 167: „In den Begriffen einer gröfsten oder kleinsten Entfernung zweier Raumpunkte hat man es mit solchen Grenzbegriffen zu thun: die Natur der Ortsdaten ist so beschaffen, dafs sich für jeden beliebigen Unterschied je zweier unter ihnen andere Ortsdaten ausfindig machen lassen, deren Unterschied unter jenen herabsinkt oder ihn übersteigt.

des Abstandes; einer ist ebenso natürlich und ursprünglich wie der andere. Auf diesen Punkt noch näher einzugehen, ist überflüssig, wir können uns im wesentlichen auf das im ersten Paragraphen bezüglich der Richtung Gesagte berufen.[1]) Während die Richtung nun ihren anschaulichen Ausdruck in dem Strahl findet, tritt der Abstand in der Strecke in Evidenz. Durch die Strecke wird der Abstand zweier Punkte und zwar der sogenannten Endpunkte bestimmt.[2]) Die drei Begriffe Gerade, Strahl, Strecke sind sehr scharf aus einander zu halten; gerade in ihrer mifsbräuchlichen Anwendung liegt die Ursache der vielfachen Verwirrung und Unklarheit in den hier behandelten Fragen. Ganz besonders aber sei auch hier noch einmal hervorgehoben, dafs sofort mit dem Setzen zweier Punkte der Begriff Abstand auftritt, auch ohne dafs er seine Veranschaulichung in der Strecke findet.[3]) Die Strecke ist

---

Man möchte meinen, dies sei so evident, dafs niemand dawider sündigen werde; trotzdem findet sich in vielen Schlüssen, die eben darum Fehlschlüsse sind, die Existenz eines irgend einem Raumpunkte nächsten Punktes, die Existenz kleinster Teile einer Linie u. dergl. vorausgesetzt."

Ein näheres Eingehen auf diese Sätze verbietet sich hier, zumeist weil die Kenntnis des vorliegenden, höchst wichtigen Werkes nicht allgemein vorausgesetzt werden darf und daher die Erläuterung sich zu umfangreich gestalten würde. Doch sei das Werk zu eingehendem Studium empfohlen, ebenso wie die Aufsätze desselben Verfassers in der Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie: Über Anschauung und ihre psychische Verarbeitung. Bd. 9 (p. 433), 10 (p. 419), 11 (p. 53; p. 249), 15 (p. 127).

[1]) Auch die Ausführungen am Anfange des fünften Kapitels im ersten Bande dürften zur Vergleichung herangezogen werden.

[2]) Man könnte auch sagen, die Strecke sei das Mafs des Abstandes.

[3]) Dieselbe Ansicht findet man ausgesprochen in B. Bolzano, Die drei Probleme der Rektifikation, der Komplanation und der Kubierung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen etc. (Leipzig 1817, Kummer). Der Verfasser spricht sich in den Paragraphen 11—20 über Beziehungen zwischen Punkten und Linien aus. Im § 20 heifst es: „Der Begriff der Entfernung ist viel einfacher, als der der Länge, weil sich Entfernung bei jedem Systeme zweier Punkte findet, ohne dafs man sie sich mit irgend einer Linie, am wenigsten aber mit einer geraden, verbunden zu denken braucht." In den folgenden Paragraphen behandelt Bolzano das Thema noch in seinen Einzelheiten (bis § 30) ausführlicher.

gewissermaſsen erst sekundär das Bild des primären Begriffes Abstand. Zwei Punkte haben Abstand, auch ohne daſs die zugehörige Strecke vorhanden ist, während umgekehrt natürlich, wenn uns eine Strecke gegeben ist, dies nicht anders möglich ist, als daſs der Abstand der Endpunkte gleichzeitig da ist.[1])

Da Abstand und Richtung gleichzeitig bei dem Setzen oder Erfassen zweier Punkte auftreten, überhaupt nur durch Abstraktion von einander getrennt, auseinander gehalten werden können, so deutet dieser enge Zusammenhang auf eine innere Verwandtschaft. Diese liegt in dem von uns im § 1 erwähnten Gesetze, daſs wir die beiden Punkte mit einem Minimum von psychischer Arbeit erfassen: so fallen Richtung und Abstand psychologisch zusammen.[2]) Fassen wir die Frage rein mechanisch, so kommen wir zu demselben Resultat: sich in der Richtung auf etwas hin bewegen, heiſst doch nichts anderes als auf dem kürzesten Wege sich nach etwas hin bewegen. Also auch bei dieser Auffassung sind Richtung und Abstand identisch.[3])

Zum Schluſs dieser Betrachtungen müssen wir dann noch des Problems der Umkehrbarkeit gedenken. Günther schreibt darüber in „Der Thibautsche Beweis“ p. 5: „... stets erheben sich die allgemeinen Schwierigkeiten bei dem Versuche, zu beweisen, daſs eine mit umgewechselten Endpunkten neben die erste gelegte Strecke durchaus mit jener identisch, also umkehrbar sei.“ Bei unserer Auffassung des Begriffes Abstand als einer ursprünglichen Vorstellung, die sofort beim Erfassen zweier Punkte auftritt, wird die Frage überhaupt nicht auftauchen können, da beide Punkte völlig gleiche Beziehung zum Abstand haben resp. umgekehrt der Abstand beiden

---

[1]) Man vergl. Bd. I p. 305/6.

[2]) Bei Kerry, System einer Theorie der Grenzbegriffe, findet sich eine ähnliche Bemerkung gelegentlich der Diskussion über die Entstehung des Begriffes der mathematischen Geraden, indem die beiläufige Gerade als Linie kleinsten physischen und psychischen Kraftmaſses bezeichnet wird.

[3]) Man vergl. Simon „Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie“ p. 12. Dort heiſst es am Schlusse ähnlicher Betrachtungen: „In diesem Zurückführen liegt die Unauflöslichkeit der Begriffe Abstand und Richtung.“

Punkten gegenüber sich identisch verhält. Eines Beweises für die Identität $AB = BA$, quantitativ genommen, bedürfen wir also nicht. Äufserst sympathisch ist uns, was Simon in seiner Programmarbeit „Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie" zu dieser Frage schreibt. Zum Teil sind seine Aufserungen schon im § 1 S. 41 wiedergegeben. Hier interessiert vor allen Dingen folgende Stelle (p. 11): „Dabei ist auch ein gewisses zeitliches Moment zu betonen; fasse ich zwei Punkte zugleich auf, so erhalte ich den Abstand, und dies ist der innere Grund, weshalb $AB = BA$ ist; fasse ich die Punkte nach einander auf, so erhalte ich die Richtung."

Ein ganz neues Moment würde in die Erörterung der vorliegenden Frage hineingetragen werden müssen, wenn wir die Gerade vor der Strecke betrachteten. Nehmen wir dann auf der Geraden zwei Punkte an, so könnte der Abstand AB als ein völlig verschiedener von dem Abstand BA angesehen werden, wenn wir die Aufeinanderfolge der Auffassung beibehielten. BA würde dann ∞ sein; wir würden uns somit den Anschauungen nähern, die die Gerade als einen Kreis mit unendlich grofsem Radius ansehen. Doch ist hier nicht der Platz, auf diese Gedanken näher einzugehen, wenn auch betont werden mufs, dafs eine derartige Betrachtungsweise wegen ihrer Analogie mit den entsprechenden Betrachtungen beim Kreise vielleicht nicht ohne methodisches Interesse sein würde.

Nach den vorstehenden Auseinandersetzungen tritt der Begriff des Abstandes in seiner ganzen Reinheit nur hervor bei der Auffassung zweier Punkte. Dennoch wird es sich empfehlen, den Begriff zu erweitern und ihm noch eine weitere begriffliche Ausdehnung zu geben, wodurch seine Brauchbarkeit bei der Erörterung der einfachsten Lagenverhältnisse in erhöhtem Mafse sich geltend macht. Ich meine diese Erweiterung in dem Sinne, dafs wir auch von dem Abstand eines Punktes von einer Geraden, resp. überhaupt von einer Linie, ja auch von dem Abstand eines Punktes von einer Fläche, einem Körper sprechen. Selbstverständlich mufs hier eine genaue Festsetzung stattfinden darüber, was man in diesen Fällen unter Abstand zu verstehen habe. Gemeint ist

— und darüber wird wohl kein Zweifel bestehen, weil ja Abstand überhaupt nur zwischen zwei Punkten in Betracht kommen kann — der Abstand von demjenigen Punkte des räumlichen Gebildes, der dem betrachteten Punkte am nächsten liegt, für den wir den Ausdruck „Nachbarpunkt“ einführen wollen. Der Abstand eines Punktes von einer Fläche z. B. ist also der Abstand des Punktes und seines Nachbarpunktes auf der Fläche; dieser Abstand wird in der Strecke zwischen diesen beiden Punkten veranschaulicht.

Abgesehen von einigen wenigen, leicht zu charakterisierenden Ausnahmen (wenn wir z. B. den Mittelpunkt eines Kreises oder einer Kugel nehmen) wird es immer nur einen solchen Punkt geben, wie uns ohne weiteres die reine Anschauung lehrt. Für die Planimetrie würde der Abstand in diesem erweiterten Sinne also noch in zwei Fällen zu betrachten sein bei der Geraden und beim Kreise. Es wird zur gröfseren Klarheit nötig sein, hier einige Betrachtungen aus dem dritten Paragraphen dieses Kapitels, der sich mit Lagenuntersuchungen beschäftigt, vorwegzunehmen. Nehmen wir an, dafs eine Gerade und ein Punkt gegeben seien, so kann der Punkt P auf der Geraden $\mathfrak{G}$ liegen oder aufserhalb. Liegt P in $\mathfrak{G}$, so ist der Abstand selbstverständlich gleich Null, denn Punkt P fällt hier mit seinem Nachbarpunkt zusammen, liegt auf (in) seinem Nachbarpunkt. Liegt P aufserhalb $\mathfrak{G}$, so können wir den Abstand von P und seinem Nachbarpunkte A betrachten, der in der Strecke PA in Evidenz tritt: PA ist dann der Abstand des Punktes P von der Geraden $\mathfrak{G}$. Wir werden ohne weiteres einsehen, dafs es keinen zweiten Punkt auf $\mathfrak{G}$ giebt, der gleich nah an P liegt. Betrachten wir Kreis und Punkt, so haben wir zunächst den schon bekannten Begriff des Zentralabstandes d. h. des Abstandes P von Z. Hierzu kommt dann der neue des Abstandes, den P vom Kreise selbst hat. Die Fruchtbarkeit der hier ausgesprochenen und neu bestimmten Begriffe wird sich im § 3 zeigen.

Hiermit sollen die Erörterungen des Begriffes Abstand selbst abgebrochen werden, da die genaueren Untersuchungen über den Abstand zweier „endlich benachbarten“ Punkte, sowie zweier „unendlich benachbarten“ Punkte aus dem Rahmen der

im Elementarunterricht verwertbaren Begriffsbestimmungen herausfallen; doch wollte ich wenigstens hier darauf hingewiesen haben.

Es folgen nun die Zitate, wobei selbstverständlich die Lehrbücher keine Berücksichtigung finden, in denen entweder in Form einer Erklärung oder eines Grundsatzes weiter nichts ausgesagt wird, als dafs die Gerade der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten sei oder dafs es zwischen zwei Punkten nur eine Gerade gebe oder dafs eine begrenzte Gerade (d. h. eine Strecke) eine Länge sei oder dergl.

In vielen Werken findet sich auch eine Erklärung, wie die folgende: Die Strecke ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten und wird auch der Abstand der beiden Punkte genannt, oder: Die Strecke bestimmt den Abstand der beiden Punkte *A* und *B*. Auch diese Erklärungen sollen nicht zitiert werden.

Ganz abgesehen wird ferner von denjenigen Werken, in denen der Satz über die kürzeste Entfernung als Lehrsatz bewiesen wird, da diese Auffassung mit der unsrigen ganz unvereinbar ist. Wir sehen in diesen sogenannten Beweisen auch nur einen circulus.

Hauff, Lehrbegriff d. r. Elem.-Math. — Frankfurt a/M. 1803.

p. 134: „Die kleinste mögliche Linie von einem Punkte nach einem andern oder nach einer Linie oder Fläche heifst der Abstand oder die Entfernung (distantia) des Punktes vom andern Punkte oder von der Linie oder Fläche.“[1])

[1]) Hauff fafst also auch den Begriff Abstand in dem weiteren Sinne, allerdings ohne nähere Begriffsbestimmung. — Das erste Zitat will ich aufserdem benutzen, um folgendes auszusprechen. Die Existenz des durch Superlativ Ausgedrückten ist logisch unmittelbar gewifs, nicht dagegen die des einfach positiv gesetzten. Im Gebrauch des Superlativ liegt also das logisch wirklich Vorhandene z. B. die kürzeste Linie. Es ist der Begriff der Grenze, des Genauen, des Vollendeten. Innerhalb eines Jahres giebt es einen heifsesten Tag, aber es braucht keinen wirklich heifsen Tag zu geben. — Hiergegen läfst sich nun, wenn man eben wegen des Grenzbegriffes die Singularität des Gesetzten folgern will,

p. 135: „Unter allen Linien, die von einem Punkte nach einem andern möglich sind, ist die gerade die kürzeste.“

Dazu ein weitläufiger (Euklidischer) Beweis von 4 Seiten. Resultat:

p. 139: „Der Abstand eines Punktes *A* von einem andern *B* ist also die gerade Linie *AB*.“[1])

In einer Anmerkung heifst es: „Euklides hat von diesem Satze nur den ersten Teil, nämlich den Satz: die gerade Linie ist kleiner als jede gebrochene zwischen den nämlichen Endpunkten, bewiesen (Elem. I, 20). Archimedes hingegen hat den Satz in seiner ganzen Allgemeinheit als ein Axiom aufgeführt. Spätere Geometer sind ihm darin gefolgt, nur zum Teil mit dem Unterschiede, dafs sie den Satz unter dem etwas veränderten Ausdrucke: die gerade Linie ist der kürzeste Weg von einem Punkte zum andern, als Definition zum Grunde gelegt haben, wie noch ganz neuerlich Legendre (Elémens de Géométrie. Paris 1794. Def. III) gethan hat. Allein da der Satz in der That ebenso wenig eine Definition, als ein Axiom, sondern ein Lehrsatz ist, so mufs er, so gut wie andere Lehrsätze, bewiesen werden.“

---

einwenden, dafs die Existenz des superlativ Gesetzten noch vieldeutig sein kann, es gab keinen heifsesten Tag, viele waren von gleicher Temperatur oder auf der Kugel sind zwischen zwei Punkten viele kürzeste Linien vorhanden. Du Bois-Reymond sagt in seiner allgemeinen Funktionentheorie p. 285: „Das Axiom, dafs die Gerade der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten sei, und dafs es auch nur einen kürzesten Weg giebt, ist kein eigentliches geometrisches Axiom. Die Untersuchung zeigt, dafs der ihm zu Grunde liegende Begriff der Rektifizierbarkeit ein analytischer ist, weil ein Grenzbegriff darin steckt.“

[1]) p. 73 heifst es schon: „Zwischen zwei Punkten ist nicht mehr als eine gerade Linie möglich.“

„Durch zwei Punkte ist also die gerade Linie zwischen ihnen, ihrer Lage und Länge nach, gegeben.“

„Teils aus diesem, teils aus einem andern erst späterhin zu entdeckenden Grunde wird der Abstand zweier Punkte durch die gerade Linie bestimmt, die sich von dem einen nach dem andern ziehen läfst.“



Förstemann, Lehrb. d. Geometrie. — Danzig 1827.

p. 3: „Der Abstand zweier Punkte ist die Länge der Geraden zwischen denselben.“[1])

Arneth, System der Geometrie. — Stuttgart 1840.

p. 9: „Die Gröſse einer Geraden ist bestimmt durch die beiden Endpunkte derselben; die Gerade selbst heiſst die Entfernung dieser beiden Punkte.“[2])

Bretschneider, Lehrgebäude der nied. Geometrie. — Jena 1844.

p. 20: „Sind die beiden Endpunkte einer vollbegrenzten Geraden gegeben, so ist letztere selbst dadurch ihrer Gröſse und Lage nach bestimmt. Man sagt daher, daſs die zwischen zwei Punkten liegende vollbegrenzte Gerade den Abstand oder die Entfernung der Punkte von einander messe, und diese Entfernung wird dann die Gröſse oder Länge der Geraden genannt.“[3])

Recht, Die Elemente der Geometrie. — München 1844.

p. 8: „Derjenige Weg nun (eines Punktes zu einem andern), der an Inhalt der kleinste ist, bezeichnet die gerade Linie und giebt deswegen die kürzeste Entfernung oder bloſs die Entfernung der beiden Punkte von einander an.“[4])

---

[1]) Das ist nicht ohne weiteres, wenigstens in dieser Fassung, richtig. Auſserdem wird ungenau Gerade statt Strecke gebraucht. Die Länge der Strecke ist nicht der Abstand, sondern in ihr kommt der Abstand zur Veranschaulichung.

[2]) Siehe unsere Anmerkung zu dem Zitat auf S. 47.

[3]) Mit dieser Erklärung kann man sich einverstanden erklären. Noch besser würde man allerdings sagen, daſs die Strecke das Maſs für die fortschreitende (geradlinige) Bewegung sei, sowie der Winkel das Maſs für die drehende Bewegung ist.

[4]) Richtiger müſste es heiſsen: Derjenige Weg . . . wird durch die gerade Linie bezeichnet (zur Anschauung gebracht).

„Die gerade Linie ist die Richtung der kürzesten Entfernung zweier ihrer Punkte.“[1])

Tellkampf, Vorschule der Mathematik. — Berlin 1847.

p. 237: „Die Gerade ist unter allen Linien zwischen zwei Punkten die kürzeste und daher das Mafs ihres Abstandes von einander; oder: zwei feste Punkte A, C bestimmen die Gröfse der geraden Verbindungslinie.“

Waitz, Lehrbuch der Psychologie. — Braunschweig 1849.

p. 226: „Wie die Richtung ist auch die Länge unmittelbar mit der Vorstellung der Linie gegeben.“[2])

p. 223: „Die Gröfsenschätzung der Linie giebt die erste Vorstellung der Entfernung; denn die Linie, abgesehen von ihrer psychologischen Entstehung und als fertiges Ganze aufgefafst, ist die Menge des Zwischenliegenden, das sich zwischen zwei ausgezeichnete Punkte oder Stellen eingeschaltet findet.“[3])

Bartholomäi, Geometrie.[4]) — Jena 1851.

p. 5: „Sobald wir zwei Punkte A, B auf einander beziehen, so stellen wir uns die Entfernung zwischen beiden vor, d. h. wir haben es mit einer Dimension, d. h. mit der Linie zu thun.“

[1]) Der Verfasser dokumentiert durch diesen nicht ungeschickt gewählten Ausdruck den engen Zusammenhang zwischen Richtung und Abstand.

[2]) Der Begriff der Länge ist auch bei krummen Linien vorhanden. Er darf mit dem des Abstandes nicht verwechselt werden.

[3]) Bolzano, Die drei Probleme etc., sagt § 15: „Die zwischen den Punkten a und b enthaltene Gerade heifst ein Raumding [Raumding heifst überhaupt jedes System (jeder Inbegriff) von Punkten], das alle und sonst keine Punkte enthält, als die zwei a und b samt allen, die zwischen ihnen liegen.“

[4]) Das folgende Zitat wird mit einer gröfseren Ausführlichkeit gegeben, trotzdem dafs es schon im ersten Bande vorkommt. Der Grund hierfür wird klar sein.

Es heifst dann weiter: „Wenn wir die Abhängigkeit der Elemente einer Linie einsehen wollen, so müssen wir dieselbe entstehen lassen.“ (Bewegter Punkt *A*, unendlich viele Wege bis *B*.) „Übersehen wir alle diese Linien, so drängen sich uns die Vorstellungen von Richtung und Entfernung auf.“[1])

„Insofern nun der eine Punkt *A* dem Punkte *B* unausgesetzt zustrebt, ist die entstandene Linie Richtung, und insofern er in jener Richtung wirklich bis *B* geht, ist sie Entfernung.“

„Nennen wir also die so entstandene Linie *AB* eine Gerade, so haben wir die Erklärung: Die gerade Linie ist Richtung oder Entfernung.“

Der Verfasser geht dann näher auf den Zusammenhang von Richtung und Entfernung ein und kommt zu dem Resultat:

„Mithin kann die Gerade als Richtung nicht zugleich die Entfernung vorstellen, denn diese mufs immer zwischen zwei bestimmten Punkten gedacht werden. Als Entfernung jedoch ist die Gerade auch Ausdruck der Richtung.“[2])

Es wird aus diesen Erörterungen sodann gefolgert, dafs die Gerade durch zwei Punkte völlig bestimmt ist und weitere Erörterungen hieran geknüpft.

p. 7 heifst es: „Die Gerade als Entfernung ist auch Richtung, tritt also auch als Entfernung in Gegensatz zur krummen Linie. Gleichwohl ist die krumme Linie auch Entfernung, also nicht von der Geraden verschieden.“[3])

---

[1]) Die unmittelbare Erzeugung der Begriffe Richtung und Entfernung wird hier von der Vorstellung der verschiedenen Wege von einem Punkte zu einem andern abhängig gemacht, was uns nicht richtig erscheint. Immerhin stimmen Bartholomäis Auseinandersetzungen im wesentlichen mit den unsrigen überein, da er denselben Ausgangspunkt nimmt, nämlich die Betrachtung zweier Punkte.

[2]) Man vergl. hierzu besonders die betreffenden Stellen in Simons Programmabhandlung.

[3]) Hier würde an Stelle des Wortes Entfernnng besser das Wort Länge gewählt worden sein; also: Gleichwohl hat die krumme Linie auch Länge und ist insofern — in quantitativer Hinsicht — mit der Geraden vergleichbar.

Durch Vergleichung ergiebt sich:

1. „Nur die Gerade ist bestimmter Ausdruck der Entfernung, nicht die krumme Linie."

2. „Die Gröfse dieser Entfernung ist vollkommen bestimmt, während sie bei anderen Linien bald gröfser, bald kleiner ausfällt."

3. „Die Gerade ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten."

p. 10 heifst es: „Wenn von der Gröfse einer Geraden die Rede ist, so kann sie nur als Entfernung aufgefafst werden."

Kunze, Lehrbuch der Geometrie. — Jena 1851.

p. 4: „Grundsatz. Die gerade Linie ist kleiner als jede andere Linie, die mit der geraden dieselben Endpunkte hat.

Zusatz. Daher ist die gerade Linie zwischen zwei Punkten die rein anschauliche Vorstellung der Entfernung oder des Abstandes der beiden Punkte von einander.[1])

Anmerkung. Euklides nimmt diesen Satz nicht als Grundsatz an, er beweist vielmehr, dafs zwei gerade Linien, die von den Endpunkten einer dritten ausgehen und mit einander zusammenstofsen, gröfser sind als die dritte. Daraus folgt dann unser Satz für eine beliebig gebrochene Linie leicht. Krumme Linien aber, die mit einer Geraden einerlei Endpunkte haben, machen Weitläufigkeiten und nötigen zu Annahmen, die mindestens keine gröfsere anschauliche Klarheit haben, als der einfache Satz selbst.[2]) Die Forderung, alles zu beweisen, was sich noch irgend beweisen lasse, scheint hier mehr von philosophischem als von geometrischem Interesse zu sein. Archimedes, der gröfste Geometer des Altertums, sagt daher ohne Bedenken: ich nehme an, dafs unter solchen Linien, welche einerlei Endpunkte haben, die gerade die kleinste sei."

---

[1]) Hiermit ist das Verhältnis zwischen Strecke und Abstand vortrefflich gekennzeichnet.

[2]) Das ist sehr richtig. Eine richtige Auffassung der Geraden nach qualitativer und quantitativer Bestimmung enthebt uns überhaupt solcher Künsteleien.

August, Lehrb. d. Math. — Berlin 1852.

p. 9: „Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten. Die Länge einer geraden Linie zwischen zwei Punkten bestimmt daher die Entfernung dieser Punkte.“

Bartholomäi, Philosophie der Math. — Jena 1860.

p. 12: „Wenn wir nun zwei Dinge zusammenfassen, so mufs sich notwendig der Begriff der Richtung erzeugen. Damit verknüpft sich zugleich der Begriff der Distanz, denn Distanz ist der Grad des Aufsereinander.“

Weifsenborn, Die Elemente der Planimetrie.—Halle 1864.

p. 17: „Die gerade Linie dient daher (weil sie die kürzeste ist) dazu, die Entfernung zweier Punkte zu messen; und umgekehrt wird unter Entfernung eines Punktes von einem andern stets die kürzeste Entfernung, also die Entfernung in gerader Linie verstanden.“

Adam, Lehrbuch d. eb. u. körperl. Geometrie. — Berlin, Stubenrauch, 1869.

„Jede von zwei Punkten begrenzte gerade Linie heifst eine Strecke ... Der Abstand oder die Entfernung der beiden Endpunkte von einander wird durch die zugehörige Strecke bestimmt. Daher sagt man:

Jede durch zwei Punkte begrenzte gerade Linie hat eine bestimmte Länge.

Der Begriff: Abstand oder Entfernung nimmt allemal auf die gerade Linie Bezug. Daher sollte man nicht sagen:

Die gerade Linie ist die kürzeste Entfernung zweier Punkte von einander;

wohl aber kann es heifsen:

Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.“

E. Müller, Elemente der Geometrie. II. — Braunschweig 1869.

p. 11: „Die Strecke zwischen zwei Punkten, also an sich völlig bestimmt,*) dient auch zur Bestimmung der Entfernung oder des Abstandes der Punkte.“

*) „Nicht als die kürzeste Linie, wie man gewöhnlich sagt, sondern als an und für sich völlig bestimmte Linie dient die Strecke zur Bestimmung der Entfernung, zum Messen; denn nicht die kleinste, sondern die völlig bestimmte Gröſse bildet die Einheit beim Messen gleichartiger Gröſsen.“[1])

Hartmann, Genetischer Leitfaden. — Bautzen 1872.

p. 2: „Wodurch miſst man die Entfernung zweier bestimmten Punkte A und B?“[2])

Nagel, Lehrb. d. eb. Geometrie. — Ulm 1873.

p. 2: „Zwischen zwei Punkten läſst sich nur eine einzige gerade Linie ziehen. Daher wird auch die Entfernung zweier Punkte durch die gerade Linie gemessen, welche beide Punkte verbindet.“

Helmes, Die Elem.-Mathematik. — Hannover 1874.

p. 5: „Die Ursprünglichkeit und Gemeinsamkeit der Vorstellung der geraden Linie beruht auf den gleich ursprünglichen und gemeinsamen Vorstellungen der Richtung und Entfernung von einem Punkte im Raume nach einem andern, als deren Ausdruck und räumliche Darstellung wir uns eben die gerade Linie zwischen diesen beiden Punkten denken.“[3])

---

[1]) Das ist richtig. Hätten wir nur einen ganz bestimmten Kreis, so könnten wir auch ihn zur Messung der Entfernung zweier Punkte auf ihm benutzen.

[2]) Auch hier also wird die Strecke als das Maſs der Entfernung bezeichnet. Besser ist es immerhin, die Strecke als anschauliche Vorstellung des Abstandes zu bezeichnen.

[3]) Diese Erklärung stimmt mit unseren Ausführungen völlig überein.

„Die andere Grundvorstellung, dafs die gerade Linie zwischen zwei Punkten den Ausdruck der Entfernung dieser Punkte enthalte, spricht sich in einem andern Grundsatze über die gerade Linie aus, „dafs sie der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist“, ein Satz, der freilich in Beziehung auf jede Verbindung der Punkte durch mehrere gerade Linien eines strengen und einfachen Beweises fähig ist, in Beziehung auf eine krumme Verbindungslinie aber nur durch eine weiter verfolgte Anschauung näher und näher gelegt, niemals aber streng bewiesen werden kann.“[1])

H. Müller, Leitfaden der eb. Geometrie. — Leipzig 1874.

p. 2: „Zwei Punkte einer Geraden begrenzen ein Stück derselben, welches Strecke genannt wird. Die Gerade, welche die beiden Punkte enthält, heifst der Träger der Strecke. Die Punkte A und B sind die Endpunkte der Strecke AB oder BA.“

„Eine Strecke wird als Mafs für den Abstand ihrer Endpunkte betrachtet[2]) oder als Mafs für den geradlinigen Weg, welchen der eine Punkt (Anfangspunkt) zurücklegen mufs, um mit dem andern (Endpunkt im engern Sinne) zusammenzufallen.“

Hablüzel, Lehrb. der synthet. Geometrie. — Leipzig 1875.

p. 36: „Unter der Entfernung oder dem Abstande eines Punktes von einem andern oder von einer Geraden oder zweier Parallelen wird ihre kürzeste Verbindungslinie verstanden.“

Schmitz-Dumont, Zeit und Raum. — Leipzig 1875.

p. 38: „Ist die Bewegung von dem einen Orte zum andern

---

[1]) Da der Verfasser in seiner ersten Ausführung den Begriff der Entfernung als einen ursprünglichen bezeichnet, als deren „Ausdruck und räumliche Darstellung“ er die Gerade denkt, so hätte er unseres Erachtens nicht nötig gehabt, auf einen Beweis noch zu reflektieren.

[2]) Diese Worte sind in der neuesten (3.) Auflage leider verändert.

nun derart, dafs es nur die direkte unvermittelte Beziehung ist, in welcher irgend welche Unterschiede sich nicht angeben lassen, so nennt man dies Bewegung in gerader Linie, welche von allen möglichen Bewegungen die zweckmäfsigste zum Mafse der vorher definierten Entfernung (unvermittelte Beziehung) ist. Man nennt sie auch schlechthin Entfernung. Sie mufs die kürzeste Linie sein, weil bei ihr alle Vermittelung, Unterschiede der Richtung, welche wieder ein neues Moment in der Thätigkeit des Bewufstseins (Bewegung) veranlassen würden, ausgeschlossen ist."[1])

Fabian-Zmurko, Lehrb. d. Math. — Lemberg 1876.

p. 11: „Die Länge einer zwei Punkte verbindenden, geradlinigen Strecke wird die Entfernung dieser Punkte genannt."

Es werden zwei vollkommen gleichlange Drahtstücke, das eine *DE* gerade, das andere *AC* gebogen, verglichen, indem sie mit *A* und *D* aufeinander gelegt werden. Dann fällt *C* zwischen *D* und *E*. Es heifst dann:

„Aus dieser nur erfahrungsmäfsig erkannten Thatsache schliefsen wir nun, dafs die Entfernung der Enden eines geradgemachten Linienstückes eine gröfsere Länge besitze, als dies vor dem Geradmachen der Fall war.[2]) Die Länge eines geradlinigen Stückes *DC* ist also kleiner, als die eines gebogenen Stückes *DBC*. Hieraus folgt: Die Gerade, welche zwei Punkte mit einander verbindet, ist kürzer als jede andere, von einem zum andern führende Linie."

J. K. Becker, Die Elemente der Geometrie a. n. Gr. — Berlin 1877.

---

[1]) Ähnliche Erörterungen finden sich auch in des Verfassers „Pangeometrie, Leipzig 1877". Die unvermittelte Beziehung zweier Punkte aufeinander, darin liegt das Wesen des Begriffes Abstand.

[2]) Der hier eingeschlagene Weg zur Verdeutlichung des Verhältnisses zwischen einer Strecke und einer krummen Verbindungslinie scheint uns sehr praktisch. Auf natürlichste Weise ergiebt sich aus ihm die im folgenden ausgesprochene Schlufsfolgerung.

p. 5: „Dabei ist unter dem Abstande zweier Punkte die Länge der kürzesten Linie zu verstehen, welche durch dieselben begrenzt werden kann.“

p. 6: „Die Anschauung lehrt uns an jeder Linie die Form, d. h. die Qualität der Ausdehnung von der Gröfse oder Quantität der Ausdehnung unterscheiden. Wir vermögen uns vorzustellen, dafs eine Linie von geg. Länge ihre Form stetig ändere und dabei die Länge beibehalte.“ Daher die Linien in Bezug auf Länge vergleichbar, gleichartig.

„Sind aber zwei Punkte getrennt, so hat jede sie verbindende Linie eine Länge, die gröfser als Null, und unter allen möglichen mufs es mithin auch mindestens eine von solcher Länge geben, dafs eine noch kürzere unmöglich wäre, und dies ist dann eine kürzeste Linie.“

J. K. Becker, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Berlin 1877.

p. 7: „Durch zwei Punkte kann nur eine Gerade gehen, also auch nur eine Strecke begrenzt werden. Diese ist kürzer als jede andere Linie zwischen denselben Endpunkten.“

„Die Länge der Strecke AB ist das Mafs für den Abstand der Punkte A und B.“

Heinze, Die Elem.-Geometrie. — Berlin 1877.

p. 12: „Wer also von einem Punkte zu einem andern in gerader Linie geht, geht immer den nämlichen Weg. Wenn man also die Entfernung zweier Punkte angeben soll, so giebt man sie in gerader Linie an, weil diese bestimmt ist und sich niemand dabei irren kann.

Es giebt aber auch zwischen zwei Punkten keinen näheren Weg, als den in gerader Linie, denn kein Punkt kann einen kürzeren Weg führen, als den, welcher vor dem andern liegt. Darum ist die gerade Linie zwischen zwei Punkten nicht allein ihre bestimmte Entfernung, sondern auch ihre kürzeste Entfernung.“

Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie. — Berlin 1878.

p. 68 werden die Beziehungen im Nebeneinander geschieden in a) die innere Beziehung als Gröfse der Richtung; b) die innere Beziehung als Entfernung.

p. 272: „Es wurde ausgeführt, dafs die Denkthätigkeit im Nebeneinander die beiden Begriffe „Entfernung, Richtung“ als komplementäre Bestimmung der inneren Beziehung bildet.“

p. 274: „Die gerade Linie ist identisch mit dem Begriff der kürzesten, weil beide Attribute hierbei nichts anderes besagen, als die logische Forderung, „zwei Elemente (Punkte) unmittelbar im Denken zu verbinden“.“

Milinowski, Die Geometrie. — Leipzig 1881.

p. 1: „Das Mafs für die Entfernung zweier Punkte A und B heifst Strecke.“

Schindler, Die Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883.

p. 7: „Entfernung heifst eine kürzeste Länge.“

Recknagel, Ebene Geometrie. — München 1885.

p. 8: „Die zwischen zwei Punkten liegende gerade Linie ist das Mafs für die Entfernung der beiden Punkte.“

F. Fischer, Anfangsgründe d. Math. — Leipzig 1887.

p. 5: „Zwei Punkte A und B grenzen auf der Geraden G ein Stück von bestimmter Gröfse, die Strecke AB, ab. Die Strecke AB giebt den Abstand oder die Entfernung der beiden Punkte A und B an, weil gerade Linien die einzigen sind, welche sich stets zur Deckung bringen lassen, und daher ihre Teilstücke allein direkt verglichen oder gemessen werden können.“

Zindler, Beiträge zur Theorie der math. Erkenntnis. — Sitzungsberichte. Wien 1889.

p. 3: „Wenn wir uns nach den geometrischen Grundvorstellungen umsehen, so ... giebt es hier mehrere aufeinander nicht zurückführbare und undefinierbare Fundamentalvorstellungen. Als solche müssen z. B. ..., die Distanz, ... angesehen werden"

p. 4: „Die Objekte, welche unter einige der oben angegebenen Grundbegriffe fallen, sind Vergleichungsrelationen zugänglich, wie die Möglichkeit ihrer quantitativen Messung erkennen läſst."

„Die Vorstellung einer Punktdistanz kann als Vorstellung einer Relation zwischen zwei absoluten psychologischen Ortsbestimmungen aufgefaſst werden (cf. Meinong, Hume-Studien II. p. 50 [620]). Mit diesen ersten Relationen befaſst sich jedoch die Mathematik nicht, denn um absolute Distanzbestimmungen ist es ihr nicht zu thun, sondern nur mit Relationen zwischen diesen Relationen ..."[1])

„Wenn also auch die Distanzen als Relationen zwischen absoluten Fundamenten [Fundamente einer Relation heiſsen die Dinge, die in Relation stehen, also bei Verträglichkeitsrelationen die Dinge (Vorstellungen, Urteile), die mit einander verträglich oder unverträglich sind, bei Vergleichungsrelationen die Dinge (Vorstellungen etc.), die mit einander verglichen werden. Ausführlicheres cf. Meinong a. a. O. II. p. 44 [614] f.] zu fassen sind, so sind doch diese ersten Relationen an und für sich für die Geometrie irrelevant.[2]) Die Relationen müssen sich zuletzt auf Fundamente stützen, die nicht mehr Relationen sind. Man könnte aber eben schon die Strecken als jene primären Fundamente ansehen, welche in den Relationsurteilen der Längenmessung auftreten. Dann ist ein weiteres Zurück-

---

[1]) Will die Mathematik bestimmte Definitionen aufstellen, so muſs sie sich allerdings um solche ersten Relationen kümmern; aber, wie gesagt, nur bei den Begriffsbestimmungen.

[2]) Dem müssen wir nochmals entschieden widersprechen. Wir halten im Gegenteil gerade die Untersuchungen für prinzipiell auſserordentlich wichtig, besonders bei der Frage nach den Grundlagen der Geometrie.

gehen auf die absoluten Orte nicht notwendig. Wenn man die psychologische Vorstellungsweise zu Rate zieht, ergiebt sich folgendes: Man kann sich eine Distanz einmal als durch zwei Punkte gegeben denken, das andere Mal durch eine Strecke.[1]) Im ersten Falle liegt in der Distanzvorstellung die Vorstellung einer Relation zwischen absoluten psychologischen Orten, im zweiten Falle ist von einer Relation nichts zu bemerken. Es ist von einem Vergleich zwischen irgend etwas nichts zu bemerken, wie etwa früher die Orte der Punkte verglichen wurden. Man stellt sich nur ein Stück einer Geraden vor."[2])

„Es ist auch nur ein Objekt, was jetzt vorgestellt wird; nämlich die Strecke, während früher zwei Punkte vorgestellt wurden."

„Der Umstand, dafs man zu einer Distanzmessung die gerade Linie benötigt, bringt es mit sich, dafs man sich in der Geometrie die Distanzen immer durch Gerade ausgefüllt denkt, daher in der Geometrie nicht von Punktdistanzen, sondern von Strecken die Rede ist."[3])

„Es ist überhaupt schwer abzusehen, wieso für den wissenschaftlichen Gebrauch der Geometrie Distanz etwas wesentlich anderes sein sollte, als ein Stück einer Geraden. Es ergiebt sich also folgendes: Das, was man ohne Unterschied schlechtweg Vorstellung einer Distanz nennt, existiert unzweifelhaft in zwei psychologisch verschiedenen Formen, nämlich Vor-

---

[1]) Diese Scheidung scheint uns nicht richtig. Die Strecke ist nur die anschauliche Darstellung der Distanz zweier Punkte, nicht etwas anderes als Punktdistanz, das diesem gegenüber gestellt werden könnte.

[2]) Dieses Stück einer Geraden können wir uns aber nicht ohne die Begrenzungspunkte vorstellen. Bei einer Strecke treten also sehr wohl Relationen auf, die Beziehungen der Strecke zu ihren Begrenzungspunkten und der Begrenzungspunkte unter einander. Die Strecke kann demnach nicht als ein primäres Fundament angesehen werden. Es handelt sich nicht, wie Verfasser meint, um ein Objekt — das wäre nur eine sehr äufserliche Auffassung —, sondern um mehrere. Erst bei der Vergleichung mehrerer Strecken kann man in gewissem Sinne von den inneren Beziehungen der Bestimmungsstücke einer Strecke absehen.

[3]) Auch dies mufs bestritten werden. Man vergl. Bolzanos am Anfange dieses Paragraphen zitierten Ausspruch.

stellung einer Punktdistanz und einer Strecke. Nur die letzte Vorstellungsweise aber ist es, welche eine mathematische Bearbeitung erfährt und der Ausgangspunkt des Längenbegriffes wird, indem die Strecken unmittelbare Fundamente der in der Geometrie auftretenden Vergleichungsrelationsurteile über lineare Ausdehnungen werden."

Haller von Hallerstein, Lehrb. d. Elem.-Math. — Berlin 1890.

p. 4: „Die Strecke mifst die Entfernung zweier Punkte."

---

§ 3. Lagen- und Mafsuntersuchungen.

In den meisten Lehrbüchern schliefst sich direkt an die Erörterung der bis jetzt behandelten Grundbegriffe, wobei diese jedoch durchaus nicht gebührende Berücksichtigung erfahren, die Lehre von den Winkeln an. An der Spitze steht eine der üblichen Definitionen, dann folgen sofort die besonderen Arten: das Ganze schliefst sich höchst unvermittelt an den Anfang an und ist offenbar gar nicht geeignet, weder auf den Schüler besonders anregend einzuwirken, noch ihm einen wirklichen Begriff geometrischer Betrachtungsweise und mathematischen Denkens zu geben. Viele Lehrbücher geben auch erst noch eine Zusammenstellung allgemein mathematischer und dann besonderer geometrischer Grundsätze, wobei das Bemühen, den Stoff zu beschränken, meist zu einer Auswahl drängt, die je nach dem subjektiven Empfinden des Verfassers sich regelt, oft aber auch den Eindruck macht, als wäre hier schon eine gewisse Norm getroffen. Der Gedanke, dafs es im Unterricht auf ein paar sogenannte Grundsätze mehr oder weniger nicht ankomme, scheint allmählich mehr und mehr Anhänger zu gewinnen,[1]) seit — soweit ich es übersehen kann — E. Müller zuerst dafür eingetreten ist. Aber ebenso sehr wie die Zahl der Grundsätze methodisch nicht ins Ge-

[1]) Man vergleiche Band I, Seite 29.

wicht fällt, mit ebenso entschiedenen Nachdruck mufs hervorgehoben werden, dafs nichts thörichter sein dürfte, als am Anfange des Unterrichts dem Schüler eine Tabelle Grundsätze einzuprägen, mit denen er vorläufig gar nichts anzufangen weifs.[1]) Mit diesem Verfahren hatte man sich entschieden von der natürlichen Lehrweise — und keineswegs zum Vorteile des Unterrichts — entfernt. Man bringe die Grundsätze da, wo man ihrer zuerst bedarf.

Meiner Meinung nach müssen sich an die ersten Betrachtungen über Raum, Körper, Flächen, Linien und Punkte (ausgehend von der Grenzbetrachtung),[2]) nach einer kurzen Hinweisung auf die Bedeutung der Geometrie, wobei wesentlich der praktische Wert betont werden darf, sofort Untersuchungen über die Lage anschliefsen. Hierbei geht man dann, wie ich schon dargelegt, vom Punkte aus, da die Raumgebilde jetzt losgelöst von ihren direkten Beziehungen (Grenzen) als selbständige Gebilde angesehen werden müssen. In früheren Zeiten pflegte man der Kombinationslehre einen ganz besonderen Wert für die Bildung beizulegen und in ihr das vorzüglichste Bildungsmittel des mathematischen Unterrichts zu sehen. Und gewifs nicht ganz mit Unrecht! Vor einer übertriebenen Schätzung mufs man sich allerdings hüten, aber die Wichtigkeit dieses Zweiges mufs anerkannt werden. Nur möchte ich auch hier betonen, dafs es nach meiner Meinung weniger auf die Lehren der Kombination selbst ankommt,

---

[1]) Vergl. Lehrproben und Lehrgänge. 32. Heft. 1892: Dr. A. Gille, Didaktisches aus dem planimetrischen Unterrichte. In diesem Aufsatze heifst es p. 95: „In den meisten Lehrbüchern werden die Grundsätze nach alter Euklidischer Manier für sich allein, ohne Zusammenhang mit den andern der eigentlichen Planimetrie vorausgeschickt. So unvermittelt an den Schüler herangebracht, in welchem sich gar kein Interesse denselben entgegenstreckt, können sie durch ihre abstrakte und oft recht unklare Form nicht dazu beitragen, ihm den Eingang zur Mathematik leichter und angenehmer zu machen.“ Ebenfalls in diesem Sinne schreibt mir Direktor Thaer-Halle: „Was ich für nötig halte zu betonen, ist, dafs nicht alle Grundsätze den gesamten Lehrsätzen vorangestellt werden können.“.

[2]) Gerade und Ebene werden als bekannte Vorstellungen vorausgesetzt und vorläufig nicht eingehend behandelt.

als auf eine geschickte Anwendung in den verschiedenen Zweigen des mathematischen Unterrichts. So bietet auch der planimetrische Unterricht auf allen verschiedenen Stufen ein sehr geeignetes Feld zu Kombinationen — und gerade diese praktische Kombinationslehre erscheint mir von gröfserem methodischem Werte, als die eigentliche theoretische. So möchte ich ein Beispiel erwähnen, das mir besonders geeignet erscheint, die Wahrheit des Ausgeführten zu bekräftigen, das ist die Lehre vom Parallelogramm. Hier bietet sich bei der Aufstellung der Umkehrungen eine sehr gute Gelegenheit, Kombinationen (im ganzen 9) zu bilden, über deren Gültigkeit natürlich Untersuchungen anzustellen resp. Beweise beizubringen sind. So gestaltet sich diese eine Figur zu einer reichhaltigen Quelle fruchtbarster Thätigkeit.

Diese Kombinationen haben ferner das Gute, dafs sie gewissermafsen ein Gerippe des Inhalts geben, das leicht im Gedächtnis haftet oder wenigstens leicht wieder reproduziert werden kann.

Der Gang des planimetrischen Anfangsunterrichtes mag sich nun folgendermafsen gestalten.

Lagenbetrachtungen.

I. Systematischer Aufbau.[1])

A.

1. Punkt und Punkt.

(Bei diesen Erörterungen kommt man zu den Begriffen: Richtung, Abstand, Strecke, Strahl, Gerade, Kreis. Vergleichungen von Strecken schliefsen sich an.)

2. Punkt und Gerade.

3. Punkt und Kreis.

---

[1]) Ich beschränke mich bei diesen ersten Betrachtungen auf je zwei Elemente. Es könnte in Erwägung gezogen werden, ob man weitere Elemente in den Kreis der Betrachtung ziehen soll; z. B. die Möglichkeit unendlich vieler Geraden durch einen Punkt, dem dual die unendlich vielen Punkte auf einer Geraden gegenüberstehen. Wenn man derartige Betrachtungen schon hier anstellen will, dann mufs man jedenfalls das duale Prinzip anwenden.

B.

1. Gerade und Punkt.
2. Gerade und Gerade.
3. Gerade und Kreis.

C.

1. Kreis und Punkt.
2. Kreis und Gerade.
3. Kreis und Kreis.

II. Ausführung.

A) 1. Punkt und Punkt. Hier kann ich mich prinzipiell ganz kurz fassen, da die wichtigsten hierher gehörigen Untersuchungen schon im Anfange des fünften Kapitels im ersten Bande zum Teil erledigt sind, zum Teil in den beiden ersten Paragraphen dieses Kapitels.[1]) Es möge nur noch einmal wiederholt werden, dafs wir mit Hülfe dieser einfachen Elemente eine ganze Reihe sich natürlich ergebender neuer Elemente erhalten. Besonders möchte ich als äufserst wichtig das betonen, dafs sich bei diesen Betrachtungen die Elementargebilde Gerade und Kreis (s. I 5) aufs natürlichste ergeben. Gerade diese erste Untersuchung ist also von ganz besonderer Bedeutung. Will man die Begriffe des Strahlenbüschels und der Punktreihe entwickeln, so bietet sich ebenfalls hier die natürlichste Gelegenheit. Ich mufs allerdings gestehen, dafs ich den Begriff des Strahlenbüschels im planimetrischen Elementarunterricht für entbehrlich halte, während auf der andern Seite die Punktreihe nicht wohl entbehrt werden kann. Punktreihe und Träger der Punktreihe sind zwei dem kindlichen Begreifen zugängliche Vorstellungen, deren innere Beziehung mir für die Auffassung der Geometrie sehr wertvoll erscheint und die ich deshalb nicht bei Seite lassen möchte. Sie sind übrigens besonders bei der Entwickelung des geometrischen Ortes von wesentlicher Bedeutung und es bietet sich auch sonst häufiger Gelegenheit, von ihnen Gebrauch zu machen.

[1]) Man vergleiche auch das dritte Kapitel des ersten Bandes.

Auch dafs der mifsverständlichen Auffassung, als wenn eine Linie etwa aus einzelnen Punkten bestände oder aus solchen zusammengesetzt gedacht werden könne, durch eine klare Erfassung der Begriffe Punktreihe und Träger der Punktreihe entgegengearbeitet wird, läfst es uns wünschenswert erscheinen, diese Betrachtungen gleich anfänglich zu erledigen.

Was nun die praktische Durchführung betrifft, so wird man natürlich auch hier sich schon von Anfang an der Tafel bedienen, obwohl die ersten Untersuchungen ebenso gut und unverändert auch im Raume angestellt werden können. Merkt man, dafs man es mit einer verständnisvollen Klasse zu thun hat, so wird es gewifs von Nutzen sein, darauf hinzuweisen, dafs Richtung, Abstand, Strecke, Strahl, Gerade zu ihrer Vorstellung der Ebene nicht bedürfen. Vorsichtig mufs man dabei — wie ich glaube — allerdings sein. Man könnte leicht mehr Verwirrung hervorrufen, als durch diese Verallgemeinerung Nutzen geschaffen wird. Der Fall, dafs die beiden Punkte zusammenfallen, darf bei diesen Betrachtungen nicht übergangen werden. Er ist als der speziellere Fall dem Aufsereinanderliegen nachzustellen.

Unter die Begriffe, die sich bei der Betrachtung zweier Punkte ergeben, gehört wesentlich der der Strecke, in der der Abstand zur Veranschaulichung kommt, die in gewissem Sinne als das Mafs des Abstandes — besser der geradlinigen Bewegung — aufgefafst werden kann.

Von dem Begriffe der Bewegung — der uns weiter unten theoretisch beschäftigen wird — mache ich ohne weiteres den ausgiebigsten Gebrauch. Ich glaube auch, dafs dem wirklich kein ernstes Bedenken entgegensteht. Ich lasse nun die beiden Punkte einander näher rücken etc., d. h. ich nehme alle möglichen Veränderungen in der Lage vor. Dabei wird man den einen Punkt wohl fest in seiner Lage lassen, weil sich dann die Betrachtungen vereinfachen. Gerade in dieser von Anfang an durchgeführten Beweglichkeit der Raumelemente resp. Raumgebilde — wie diese Beweglichkeit aufzufassen sei ihrem Wesen nach, das habe ich schon im ersten Bande, Seite 308, auseinandergesetzt, ein näheres Eingehen findet sich im vierten Kapitel dieses Bandes — sehe ich ein vorzügliches Hülfsmittel

der geometrischen Betrachtungen; nur wenn wir alles Angeschaute in immer anderer Lage betrachten, so in unserem Beispiele einmal die Punkte horizontal neben einander, dann vertikal über einander, dann den festen Punkt rechts oben, den andern links unten u. s. f. zeichnen, wird man die Schüler von jedem schablonenhaften Erfassen der Lagenbeziehungen frei machen können. Fast durchweg ist zu beachten, dafs die Schüler die vom Lehrer an die Tafel gezeichnete Figur in derselben Lage in ihr Heft zeichnen, man mufs deshalb von Anfang an darauf achten, dafs der Gedanke nicht in dem Schüler aufkommt, die Figur müsse gerade so gezeichnet sein, wie sie zuerst gezeichnet worden ist. Hat man einen Lehrsatz an der Tafel der Klasse vorgeführt und ruft dann einen Schüler auf, so kann man sicher sein, dafs er die Figur gerade wieder so zeichnen wird, wie sie vom Lehrer gezeichnet war — dafs die ursprüngliche Figur an der Tafel stehen bleibt und etwa alle, die aufgerufen werden, an derselben Figur ihr Kunststück machen, halte ich für einen aufserordentlich schweren methodischen Fehler, der hoffentlich nur noch ganz vereinzelt vorkommt. Gegen derartiges Auffassen der Figur mufs man also von vornherein energisch ankämpfen und beständig dafür sorgen, dafs durch eine immer andere Darstellung des Raumbildes die Phantasie zu lebhafter Thätigkeit angespornt wird, dafs — ich wiederhole es — von vornherein jede Art von Schablone gänzlich ausgeschlossen wird.[1]) Auf diese Weise wird man es auch erreichen, dafs man die zuerst gleich in ziemlicher Zahl dem jugendlichen Geiste sich neu darbietenden Begriffe gehörig verarbeitet, dem Verstande und Gedächtnis einprägt, ohne in den schwersten Fehler des Unterrichts zu fallen, nämlich langweilig zu werden.

Da nun die Strecke das Bild des Abstandes oder das Mafs des Abstandes ist, so kommen wir, indem wir die beiden Punkte in allen möglichen Lagen betrachten, sowohl der

---

[1]) Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie. Vorrede:

„Der Schüler soll soviel Phantasie haben, dafs er eine Figur nach dem Texte entwerfen kann. Die Figur abzeichnen übt die Anschauung zehnmal so viel, als sie ansehen; dieselbe aber zeichnen, zehnmal so viel, als sie abzeichnen.“

Richtung als dem Abstande nach, sofort nach den ersten Betrachtungen ungezwungen auf die Vergleichung von Strecken.

Auch hier wieder überlegen wir uns, wie viel Fälle sind möglich. Es ergeben sich deren drei. Die beiden Strecken seien a und b.[1]) Die drei Fälle sind dann

1. $a > b$.
2. $a = b$.
3. $a < b$.

In dieser oder der umgekehrten Reihenfolge müssen die Betrachtungen angestellt werden. Vielleicht liefse sich aber auch rechtfertigen

1. $a \neq b$ (a verschieden von b).
2. $a = b$.

Keinesfalls aber darf der letzte Fall als der Spezialfall vor dem andern behandelt werden, wenn er auch als der wichtigere viel gröfsere Bedeutung hat.[2]) Mir scheint die Dreiteilung deshalb vorzuziehen, weil wir dann wiederum die Veränderlichkeit berücksichtigen können. Es werden zuerst die beiden Strecken verglichen unter der Voraussetzung

$$a > b.$$

Wir nehmen an, dafs wir a bewegen können, ohne dafs es dabei seine Gestalt oder Gröfse ändert. Wir legen sie dann mit dem einen Endpunkte auf einen von b: wir schieben a, bis es mit dem einen Endpunkt auf einen von b fällt; dann

---

[1]) Eine genau geregelte Bezeichnung mufs im ganzen planimetrischen Unterrichte mit aller Strenge durchgeführt werden. Alle Punkte lasse ich mit grofsen lateinischen Buchstaben bezeichnen, Strecken mit kleinen lateinischen Buchstaben, Linien mit grofsen deutschen Buchstaben, Winkel mit grofsen lateinischen Buchstaben, über die ein Dächelchen gemacht wird, z. B. $\hat{A}$ — da die Verwendung der früher gebrauchten kleinen griechischen Buchstaben im Anfange des Unterrichts ja nicht mehr möglich ist. Auch müssen im Sprechen die verschiedenen Gebilde Strecke, Strahl, Gerade immer genau auseinandergehalten werden.

[2]) R. Sturm, Die neuere Geometrie auf der Schule. H. Z. I p. 482: „Wie sich die Schüler eben bewufst geworden sind, dafs die Gleichheit zweier Längen viel unwahrscheinlicher ist als die Ungleichheit, und also, wenn sie unter gewissen Umständen eintritt, eines Beweises bedarf, so . . .“

drehen wir, bis die beiden Strecken in dieselbe Richtung fallen, also neben dem einen Endpunkte die Richtung gemeinsam haben, dann fällt der zweite Endpunkt von *a* über den zweiten Endpunkt von *b* hinaus und zwar in die Verlängerung der Strecke *b* — was unter Verlängerung zu verstehen sei, ist schon vorher bei der Entstehung der Geraden aus der Strecke erörtert worden. —

Dann lassen wir die Strecke *a* kleiner werden, so wird der Fall eintreten, dafs $a = b$. Wir stellen nun wieder dieselben Betrachtungen wie im ersten Falle an. Jetzt ergiebt sich die völlige Deckung der beiden Strecken.[1])

Wird nun *a* noch kleiner, so haben wir den dritten Fall $a < b$. Jetzt fällt der Endpunkt *a* in die Strecke *b* selbst, zwischen deren Endpunkte.

Hieran schliefsen sich dann sofort Übungen, um in erster Linie auch die Umkehrungen der angestellten Betrachtungen in den Kreis der Überlegung hineinzuziehen. Dafs diese Streckenvergleichungen gleich hier, im Anschlufs an die Betrachtung zweier Punkte, behandelt werden, ist nicht nur natürlich und ungezwungen zu gestalten, wir werden sehen, dafs wir auch sofort weitgehende Anwendungen dieser Betrachtungen in den folgenden Fällen machen können und müssen.

Ebenso gehört auch hierher das Addieren und Subtrahieren von Strecken, das wegen der bald folgenden Anwendungen richtig geübt werden mufs.

Gleich diese erste Gelegenheit benutze ich übrigens, um den Schüler auf das Unzureichende der sinnlichen Anschauung aufmerksam zu machen. Natürlich werden die beiden betrachteten Strecken wieder in allen möglichen Lagen gezeich-

---

[1]) Ich lasse diesen Fall in Form eines Satzes aussprechen: „Legt man zwei gleiche Strecken mit den Anfangspunkten und der Richtung aufeinander, so fallen auch die Endpunkte zusammen.“ Er dient dann später als Hülfssatz bei den Beweisen der Kongruenzsätze. Zugleich ist es von Wert, schon hier darauf hizuweisen, dafs Gleichheit von Strecken dazu benutzt werden kann, das Zusammenfallen von Punkten zu beweisen oder besser umgekehrt, dafs das Zusammenfallen von Punkten auf Gleichheit von Strecken zurückgeführt wird.

net, es bietet sich also Gelegenheit, z. B. die Sinnestäuschung, dafs von zwei gleichen Strecken die vertikale länger erscheint als die horizontale, vorzuführen. Von ganz besonderem Werte aber scheint es mir, Übungen im Taxieren anzustellen, um die Anschauung auszubilden. Ähnlich liegende Strecken zu vergleichen, wird auch dem Ungeübtesten ziemlich leicht fallen, aber bei verschiedener Lage zeigt sich schon, dafs wir uns auf unser Auge nicht verlassen können und dafs selbst reiche Übung darin nichts wesentlich bessert. Das giebt mir denn Veranlassung, von dem Unterschiede der praktischen Vergleichung von Strecken — etwa im täglichen Leben — und von der mathematischen Vergleichung zu sprechen. Besonders wertvoll ist es dabei, gleiche Strecken zu zeichnen oder Modelle aus starkem Draht herstellen zu lassen — wie sich denn überhaupt empfiehlt gerade bei diesen Untersuchungen Stäbe anzuwenden, von denen allerdings der eine veränderlich in seiner Länge sein mufs. Es mufs dann hervorgehoben werden, dafs mathematisch die Voraussetzung das Gültige aussagt, ohne Rücksicht auf die sinnliche Darstellung. Es kommt nur darauf an, was von den Dingen ausgesagt wird, nicht wie wir sie sehen. Sprechen wir von zwei gleichen Strecken, so handelt es sich um völlige Gleichheit, nicht um annähernde, wie sie bei der Zeichnung mit Kreide ja nur hergestellt werden kann. Besonders bei der Umkehrung ist es von wesentlicher Bedeutung, hierauf zu achten. Wenn wir zwei Stäbe aneinander legen und sie fallen mit Anfangs- und Endpunkten zusammen, so nennen wir sie gleich; aber ob sie mathematisch gleich sind, das ist eine ganz andere Frage; die würden wir nur bejahen können, wenn wir mathematisch gewifs behaupten können, dafs je zwei Endpunkte zusammenfallen. Alle diese Betrachtungen sind von nicht zu unterschätzender Bedeutung; gerade im Anfangsunterricht handelt es sich darum, recht genau zu verfahren, keine Unklarheit zurückzulassen. Es darf schon etwas mehr Zeit kosten, man wird das später reichlich wieder einbringen dadurch, dafs der Schüler mit ganz anderem Verständnis an die Betrachtung der geometrischen Verhältnisse herangeht. Aber man mufs dafür sorgen, dafs dieses genaue Vorgehen den Schülern nicht

langweilig wird — und da ist es vor allen Dingen notwendig, dafs der Schüler sich nicht einfach rezeptiv verhalte. Die angestellten Betrachtungen sind aber auch derartig, dafs eine fortwährende Mitarbeit der Schüler sehr leicht möglich ist, ja ich habe gefunden, dafs die Schüler durchweg mit grofsem Interesse auf diese Lagenbetrachtungen und alles, was sich damit verknüpft, eingehen. Manche gute Frage zeigt den Erfolg des Unterrichts und bald wird man nur noch den allgemeinen Gang leiten, die Einzelheiten werden von den Schülern selbst gefunden.

Als äufserliches Hülfsmittel, das Interesse zu heben, verwende ich übrigens bei allen Zeichnungen bunte Kreide oder bei Darstellung durch Modelle bunte Stäbe. [1])

A) 2. Punkt und Gerade.

Zwei Fälle sind möglich.

1. Die Gerade 𝔊 geht nicht durch den Punkt P.

2. Die Gerade 𝔊 geht durch den Punkt P.

Geht die Gerade nicht durch den Punkt, so sagt man die beiden Gebilde liegen aufsereinander. Auf der Geraden 𝔊 giebt es einen Punkt, der von allen Punkten der Geraden dem Punkte P am nächsten liegt. Wir wollen ihn als „Nachbarpunkt" des Punktes P bezeichnen. Verbinden wir P mit dem Nachbarpunkte A, so giebt die Strecke PA den Abstand von Gerade und Punkt an. Betrachtet man die Punkte auf 𝔊 von A aus nach beiden Seiten hin, so liegen sie immer weiter von P entfernt, je weiter sie von A entfernt sind. Es leuchtet sofort ein, dafs es aufser A auf 𝔊 immer zwei Punkte giebt, die von P ebenso wie von A gleichweit entfernt sind. Hält man P fest und läfst 𝔊 sich bewegen, so sind verschiedene Bewegungen möglich.

Ehe wir hierauf eingehen, wollen wir aber noch

[1]) J. H. T. Müller, Lehrb. der Geometrie. Vorrede: „Auch darf man hierbei nicht übersehen, dafs es so leicht und für den jüngeren Schüler so anziehend ist, sich, was ihm etwa undeutlich bliebe, durch Anwendung ganz einfacher mechanischer Hülfsmittel vollständig anschaulich zu machen . . . gerade dieses sofortige und selbsteigene Hervorbringen eines Gebildes führt ihn so sicher und bleibend zum Verständnis der Sache, dafs ein solches Verfahren nicht dringend genug anempfohlen werden kann."

folgende Betrachtungen anstellen. Verlängert man die Strecke *PA* über *P* sowohl wie über *A* hinaus, so erhält man eine zweite Gerade. Wir bezeichnen jetzt die gegebene Gerade mit $\mathfrak{G}_1$, die neue mit $\mathfrak{G}_2$. Man sagt $\mathfrak{G}_2$ liege senkrecht zu $\mathfrak{G}_1$. Es ist vorläufig nicht nötig, näher hierauf einzugehen, Man kann sich mit der einfachen Angabe dieser Bezeichnung begnügen.

$\mathfrak{G}_1$ kann sich nun so bewegen, dafs *A* der Nachbarpunkt von *P* bleibt, wir können uns zweitens $\mathfrak{G}_1$ in sich verschoben denken, dann erhält man andere Nachbarpunkte, aber diese haben immer gleichen Abstand von *P*, wie vorher *A*. Drittens können wir $\mathfrak{G}_1$ um *A* drehen; dabei bleibt *A* von *P* gleichweit entfernt — während es in den ersten Fällen seinen Abstand von *P* änderte resp. der Abstand *PA* ein anderer wurde und zwar konnte *PA* gröfser und kleiner werden. Während aber *PA* unverändert bleibt, ändern im Falle der Drehung die andern Punkte von $\mathfrak{G}_1$ ihre Lage gegen *P*, die Punkte auf der einen Seite von *A* kommen dem Punkte *P* näher, die auf der andern entfernen sich von *P*. Während der Drehung werden immer neue Punkte Nachbarpunkte von *P*, bis schliefslich der zweite Hauptfall eintritt und $\mathfrak{G}_1$ durch *P* hindurchgeht, *P* mit seinem Nachbarpunkte zusammenfällt.

Bei den zuerst geschilderten Bewegungen von $\mathfrak{G}_1$ bleibt die senkrechte Lage der beiden Geraden $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ bestehen, dreht man aber $\mathfrak{G}_1$ um *A*, so sind die beiden Geraden nicht mehr senkrecht zu einander. Nur bei der Verschiebung der Geraden in sich selbst bleibt der Abstand von Punkt und Gerade derselbe — obwohl *A* nicht Nachbarpunkt bleibt. Bewegen wir $\mathfrak{G}_1$ so, dafs *A* Nachbarpunkt bleibt, so ändert sich trotzdem der Abstand; bei der Drehung schliefslich bleibt *A* nicht Nachbarpunkt und zugleich ändert sich der Abstand von Punkt und Gerade. In diesem Falle wird der Abstand auf jeden Fall kleiner, denn während *PA* sich gleich bleibt, d. h. *A* von *P* gleichweit entfernt bleibt, kommen andere Punkte von $\mathfrak{G}_1$ dem Punkte *P* näher, bis schliefslich der Abstand verschwindet, wenn $\mathfrak{G}_1$ durch *P* geht.

Bei diesen Betrachtungen ergiebt sich schon eine mannigfache Anwendung der Streckenvergleichung.

A) 3. Punkt und Kreis.

Drei Fälle sind möglich.

1. Der Kreis $\mathfrak{K}$ geht nicht durch den Punkt P, sodafs $\mathfrak{K}$ aufserhalb liegt.

2. Der Kreis $\mathfrak{K}$ geht durch P.

3. Der Kreis $\mathfrak{K}$ geht nicht durch den Punkt P; $\mathfrak{K}$ liegt so, dafs es den Punkt P einschliefst.

Hier gilt es wieder einen neuen Begriff einzuführen, den des Zentralabstandes. Aufserdem haben wir, ebenso wie bei der Betrachtung von Punkt und Gerade, auch hier einen Punkt des Kreises, welcher P am nächsten liegt und den wir als Nachbarpunkt bezeichnen wollen. Im ersten Falle ist der Zentralabstand, den wir ein für allemal mit z bezeichnen wollen, während Z der Mittelpunkt ist, gröfser als der Radius. z besteht nämlich aus zwei Stücken, aus PA (A ist der Nachbarpunkt) und $AZ = r$. z also $> r$. Verbindet man irgend einen andern Punkt B des Kreises mit P und Z, so ist nach unserer Definition des Abstandes $PZ < PB + BZ$. Da nun $BZ = AZ = r$ ist, so folgt, dafs $PB > PA$. B war nun ganz beliebig gewählt; es geht also mit unwiderleglicher Klarheit hervor, dafs PZ wirklich durch den Nachbarpunkt geht, dafs A der Nachbarpunkt von P ist. Ganz ähnlich läfst sich nun weiter zeigen, dafs es auf $\mathfrak{K}$ einen Punkt giebt, der von P am weitesten entfernt ist und dafs dieser Punkt der Gegenpunkt von A ist.

Auch diese Gelegenheit ist vorzüglich geeignet, den Unterschied zwischen mathematischer oder reiner Anschauung und dem blofsen rein sinnlichen Betrachten klar zu machen, indem man B einmal ganz nahe bei A wählt.

Wie in A) 2 die Gerade, so lassen wir nun den Kreis sich bewegen. Die sich darbietenden Betrachtungen sind denen in A) 2 völlig analog. Im Unterrichte ist es natürlich angebracht, sie in ganzer Ausführlichkeit durchzunehmen, hier wird es genügen, darauf hinzuweisen und als besonders wichtig den Fall herauszugreifen, dafs $\mathfrak{K}$ sich so bewegt, dafs A Nachbarpunkt bleibt. Das ist hier auf zwei Arten möglich, einmal indem Z in immer gleichem Abstande von P bleibt, sich auf einem Kreise um P bewegt (zu beachten, dafs der Kreis $\mathfrak{K}$

dabei zwei Bewegungen ausführt[1])), dann indem Z sich auf der durch PZ bestimmten Geraden bewegt. Bewegt sich dabei Z auf P zu, so wird z immer kleiner; da r sich gleich bleibt, so mufs also PA sich ändern, kleiner werden; schliefslich wird $PA = 0$, d. h. der Punkt P fällt mit seinem Nachbarpunkte A zusammen, der Kreis $\mathfrak{K}$ geht durch P. z wird in diesem Falle $= r$. Setzt man die Bewegung im selben Sinne fort, so wird nun $z < r$, während A Nachbarpunkt von P bleibt, bis Z mit P zusammenfällt. Bewegt man auch jetzt noch $\mathfrak{K}$ im selben Sinne weiter, so wird A plötzlich der von P am weitesten entfernte Punkt und sein Gegenpunkt wird Nachbarpunkt von P. Wir haben einen Grenzfall gehabt, nämlich den speziellen Fall, dafs sämtliche Punkte des Kreises P gleichen Abstand hatten. P ist dabei — bei dem Passieren des Kreises — aus einem äufseren ein innerer Punkt geworden und bleibt es, so lange $z < r$ ist.“[2])

Man sieht, es ergiebt sich bei diesen einfachen Betrachtungen eine Fülle von Beziehungen und Untersuchungen, die auf die vielfältigste Weise in immer neuen Lagen vor Augen geführt dem Schüler ein weites Gebiet neuer Anschauungen eröffnen, ein Gebiet aber, das seinem Können keine unübersteiglichen Hindernisse in den Weg legt und ihn deshalb auch nicht zurückstöfst, im Gegenteil sein Interesse erweckt und dauernd fesselt und — was als das wertvollste erscheint — ihn in fortwährender Mitarbeit die geometrischen Wahrheiten selbst finden läfst.

B) 1. Gerade und Punkt.

Es dürfte vielleicht schon beim systematischen Aufbau die Meinung aufgetaucht sein, dafs dieser Fall mit A) 2 völlig identisch sei. Das ist nicht an dem, wie sich gleich ergeben wird. Denn, während wir dort den Punkt festhielten und die Gerade sich bewegen liefsen, lassen wir jetzt die Gerade in

---

[1]) Verschiebung und Drehung: Verschiebung des Zentrums längs $\mathfrak{K}$ und Drehung von $\mathfrak{K}$ um Z. — Die Bewegungen jede für sich sind ebenfalls zu erörtern.

[2]) Die Betrachtungen lassen sich ferner noch vervielfältigen, wenn man den Kreis selbst als veränderlich annimmt, d. h. bei festliegendem Z den Radius wachsen und kleiner werden läfst; doch fügen sich diese Untersuchungen nicht völlig organisch in den Gang des Ganzen ein.

fester Lage und den Punkt sich bewegen. Daſs dabei natürlich im wesentlichen Ähnliches wie bei A) 2 resultiert, liegt in der Identität der verwendeten Elemente. Es dient aber diese Behandlung — von einem etwas anderen Gesichtspunkte, wie bei A) 2 — dazu die Betrachtungen zu vertiefen und zu befestigen.

B) 2. Gerade und Gerade.

Hier sind drei Fälle möglich.

1. Die beiden Geraden haben keinen Punkt gemeinsam.[1])
2. Die beiden Geraden haben einen Punkt gemeinsam.
3. Die beiden Geraden haben zwei Punkte gemeinsam.

1. $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ haben keinen Punkt gemeinsam. Man nennt dann die beiden Geraden parallel. Nimmt man auf einer der Geraden einen Punkt an und verbindet ihn mit seinem Nachbarpunkte auf der andern Geraden, so heiſst die Strecke der Abstand der beiden Parallelen, denn es leuchtet ein, daſs diese Strecke immer gleich bleibt, wie wir auch P auf $\mathfrak{G}_1$ wählen. Denn würde dieser Abstand sich verändern, so müſsten die Geraden sich einander nähern oder sich von ein-

---

[1]) Ich stehe durchaus auf dem Standpunkte, daſs man auf der Schule diesen Fall in diesem Sinne auffaſst resp. darstellt. Sturm verlangt in seinem Aufsatze, Die neuere Geometrie auf der Schule (H. Z. I p. 474—490), daſs der Schüler schon mit den unendlich entfernten Gebilden bekannt gemacht werde. Dem widersprechen sowohl die Redaktion, wie verschiedene Schulmänner (z. B. Kober, Über die Definition des Parallelismus. H. Z. I p. 491—493; Ciala, H. Z. II p. 42—44; Reidt, H. Z. II p. 209—211), sodaſs Sturm noch einmal in H. Z. II p. 391—409 das Wort zu dieser Frage ergreift. Konsequenterweise müſste man dann den Schüler auch mit den imaginären Kreispunkten bekannt machen; zu einem solchen Vorschlage ist man aber von keiner Seite her gekommen. Man vergleiche hierzu auch den Aufsatz, Noch einmal die neuere Geometrie und die unendlich entfernten Gebilde von F. Carl Fresenius in H. Z. II p. 494—504, der den richtigen Standpunkt in trefflicher Weise verteidigt. Es gehören ferner hierher:

Hoppe, Der exakte und einfache Begriff des Unendlichen, nebst seiner Anwendung in der höheren und niederen Mathematik. H. Z. III p. 11—18.

Kober, Über das Unendliche und die neuere Geometrie. H. Z. III p. 249—264.

Ferner H. Z. III p. 155—162; 463, 265—267.

Ein genaueres Eingehen behalte ich mir für das zweite Kapitel vor.

ander entfernen. Das würde aber zur Erkenntnis bringen, dafs die beiden Geraden entweder von einem gemeinsamen Punkte herkämen oder einem solchen sich näherten.

Vorläufig scheint mir eine derartige, wie ich zugebe, ziemlich äufserliche Behandlung dieses Falles völlig ausreichend. Diese Darstellung ist für den Schüler nicht nur ganz verständlich, sondern sie ist auch von irgend welchen Schwierigkeiten deshalb ganz frei, weil hier der Parallelismus nur als Name für eine besondere Lage zweier Geraden gegeben wird: für die Lage, dafs die beiden Geraden keinen Punkt gemeinsam haben, woraus sich ergiebt, dafs sie überall gleichen Abstand haben. Wenn man will, kann man ja gleich hier Erörterungen über die Richtung daran knüpfen, doch schiebe ich diese gern weiter hinaus und operiere vorläufig nur mit dem Begriffe des Abstandes.

2. $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ haben einen Punkt gemeinsam. In diesem Falle sagt man, die beiden Geraden schneiden einander. Der gemeinsame Punkt heifst der Schnittpunkt der beiden Geraden.

3. $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ haben zwei Punkte gemeinsam. Dann haben die beiden Geraden alle Punkte gemeinsam, fallen völlig zusammen.

Nachdem so die drei Hauptfälle deutlich unterschieden und ausführlich betrachtet worden sind, mufs man nun eine gemeinsame Betrachtung daran knüpfen, indem man wiederum die Bewegung zu Hülfe nimmt. Jetzt wird sich nun Nr. 1 in neuem Lichte mit Nr. 2 vereint darstellen. Die Bewegung, die hier in erster Linie in Frage kommt, ist die Drehung. Geht man von Nr. 1 aus und läfst etwa $\mathfrak{G}_2$ sich um einen Punkt drehen, so kommt sofort zur Erkenntnis, dafs bei der geringsten Drehung Nr. 1 in Nr. 2 übergeht, dafs nämlich die beiden Geraden einen Punkt gemeinsam haben. Es ist darauf zu achten, dafs die Drehung nach beiden Seiten möglich ist und dafs der Schnittpunkt auf der Seite liegt, nach welcher hin wir gedreht haben. Je kleiner die Drehung, um so weiter liegt der Schnittpunkt entfernt; bei der weiteren Drehung nähert sich der Schnittpunkt immer mehr dem Nachbarpunkte des Punktes, um den die Drehung stattfindet, bis er schliefslich mit ihm zusammenfällt. Wir haben dann

die senkrechte Lage der beiden Geraden. Der ganze Vorgang der Drehung von der ursprünglichen Lage bis wieder zu ihr, sowohl nach der einen, wie nach der andern Seite ist mit grofser Ausführlichkeit und mit besonderer Benutzung der Anschaulichkeit darzustellen.[1]) Hierbei ist besonders darauf hinzuweisen, wie der Schnittpunkt immer weiter nach der einen Seite hinausrückt, wie dann der Fall eintritt, dafs kein gemeinsamer Punkt vorhanden ist, und dann der Schnittpunkt auf der anderen Seite in unmefsbarer Ferne liegt. Bei allen diesen Betrachtungen ist es erlaubt und völlig naturgemäfs, auf die einfache Anschauung zu rekurrieren.

Einen weiteren Gegenstand der Betrachtung bildet dann Nr. 2; jetzt lassen wir die eine Gerade sich um den Schnittpunkt drehen, neue Beziehungen tauchen auf, die Gelegenheit geben, den Begriff Richtung von neuer Seite kennen zu lernen. Es ist dabei übrigens immer zu beachten, dafs die Untersuchungen sich völlig konsequent an die schon dagewesenen anschliefsen; so werden bei den zuletzt geschilderten Betrachtungen diejenigen von A) 2 den Stütz- und Ausgangspunkt bilden müssen.[2])

Neben der drehenden Bewegung sind nun auch noch die anderen möglichen Bewegungen in den Kreis der Betrachtung zu ziehen, analog wiederum den Untersuchungen in A) 2, das ist einerseits die Verschiebung in sich selbst, dann die — wie wir jetzt sagen können — Parallelverschiebung.

Noch eine Überlegung kann angestellt werden, die allerdings besser ihre Stelle nach der gründlichen Erörterung des Parallelismus findet, nachdem der Ausdruck festgelegt ist, den man in Bezug auf die Richtung zweier Parallelen gebrauchen will. Da ich diese Betrachtungen erst im nächsten Kapitel einer näheren Erörterung unterziehen will, so will ich hier nur andeuten, dafs die Lage zweier Geraden auch unter dem

---

[1]) Es wird sich empfehlen, auch den umgekehrten Weg bei wiederholter Besprechung einzuschlagen.

[2]) Den Begriff des Winkels lasse ich vorläufig ganz aus dem Spiele. Natürlich würde es nichts verschlagen, etwa folgende Erklärung zu geben: Haben die beiden Geraden einen Punkt gemeinsam, so sagt man, sie schneiden sich oder sie bilden einen Winkel; ganz analog dem ersten Fall, wo man sagt, sie heifsen parallel.

Gesichtspunkte betrachtet werden kann, daſs entweder die Geraden einen gemeinsamen Punkt haben oder gemeinsame Richtung. Tritt beides gleichzeitig ein, so fallen die beiden Geraden zusammen.

B) 3. Gerade und Kreis.

Der hier zu behandelnde Abschnitt wird die Vorzüge der im Vorstehenden dargestellten Behandlungsweise des planimetrischen Stoffes in besonders hevorragender Weise zur Geltung bringen. Es wird sich zeigen, daſs bei der Darbietung der Lagenverhältnisse, wie sie sich vom Einfachsten aus aufbaut, eine ganze Reihe Beweise und Ausführungen, die an das Verständnis des Schülers groſse, oft nicht erfüllte Anforderungen stellen, entbehrlich macht und so dazu dienen wird, einen Teil des mathematischen Unterrichts in einer den Schüler interessierenden und ihn sympathisch berührenden Weise zur Klarheit zu bringen, der in der veralteten Form geeignet war, eher abschreckend als anregend zu wirken.[1]) Es gilt vor allem wieder die Möglichkeit der verschiedenen Fälle festzustellen. Es sind deren drei:

1. Gerade und Kreis haben keinen Punkt gemeinsam.
2. Gerade und Kreis haben einen Punkt gemeinsam.
3. Gerade und Kreis haben zwei Punkte gemeinsam.

1. Gerade und Kreis haben keinen Punkt gemeinsam, der Kreis liegt auſserhalb der Geraden.

Zunächst suchen wir den Nachbarpunkt des Zentrums auf, er werde mit P bezeichnet. P ist also derjenige Punkt der Geraden, der Z am nächsten liegt oder wir suchen den Punkt des Kreises auf, der der Geraden am nächsten liegt, die Nachbarpunkte des Kreises und der Geraden. Nach den Ausführungen in A) 3 ist sofort ersichtlich, daſs die beiden Nachbarpunkte von Gerade und Kreis sich ergeben, wenn wir Z mit P verbinden. Diese Strecke wird den Kreis im Punkte

---

[1]) Zugleich wird durch diese Darstellungsweise eine natürliche Anordnung erreicht, die verhindert, daſs Zusammengehöriges auseinandergerissen, Unverträgliches zusammengepackt wird. Alles, was man als ersten Teil der Kreislehre bezeichnen kann, wird hier und in C) 1, 2, 3 auf einfachste und natürlichste Weise behandelt und dient wiederum dazu, anderes in neuem, klarerem Lichte darstellen zu können.

A schneiden, der der Nachbarpunkt von P auf 𝔎 ist. Das geht unmittelbar aus den Betrachtungen in A) 3 hervor. Da 𝔊 keinen Punkt mit 𝔎 gemeinsam hat, so ist selbstverständlich, daſs auch der Punkt von 𝔊, der Z am nächsten liegt, weiter von Z entfernt sein muſs, als ein Punkt von 𝔎. Es ergiebt sich also zunächst, daſs der Zentralabstand — die Strecke $\overline{ZP}$ — gröſser ist als der Radius. Ganz wie in A) 3 wird auch erkannt, daſs $\overline{ZP}$ notwendig durch den Punkt von 𝔎 geht, der der Nachbarpunkt von P ist, und daſs die Verlängerung über Z hinaus den Punkt von 𝔎 trifft, der von P am weitesten entfernt ist. Hier gereichen uns schon die Streckenvergleichungen, die wir in A) 1 anstellten, sowie die Untersuchungen von A) 3 zu groſsem Nutzen: es bietet sich Gelegenheit zu reichhaltiger Anwendung. Gelegentlich möchte ich übrigens hier bemerken, daſs sich im Laufe der Untersuchungen schon eine groſse Reihe von Grundsätzen gezeigt haben, für deren genaue Formulierung und besondere Klarheit im Bewuſstsein natürlich gesorgt werden muſs.

2. Gerade und Kreis haben einen Punkt gemeinsam. Dies können selbstverständlich nur die Nachbarpunkte sein, die hier zusammenfallen. Die Gerade hat in diesem Falle den Namen Tangente. Aus den früheren Betrachtungen im Vergleich mit der jetzigen geht unmittelbar hervor, daſs der Zentralabstand, der gleich dem Radius ist, auf der Tangente senkrecht steht und umgekehrt. Aus den natürlichen Anschauungen ergeben sich so in klarster Weise alle Sätze über Tangente und Kreis, die sonst in den Lehrbüchern weitläufige, oft recht unklare Beweise erfordern, so z. B. daſs jeder andere Punkt der Geraden einen gröſseren Zentralabstand hat als P.

3. Gerade und Kreis haben zwei Punkte gemeinsam. Die Gerade heiſst Sekante, die Strecke derselben zwischen den beiden Schnittpunkten Sehne. Der Nachbarpunkt liegt jetzt innerhalb des Kreises, der Zentralabstand ist kleiner als der Radius.

Alle drei Fälle müssen natürlich auch umgekehrt betrachtet werden, indem man von dem Zentralabstand ausgeht.

Besondere Fruchtbarkeit gewinnen nun die Betrachtungen erst, wenn man mit Zuhülfenahme der Bewegung alle drei

Fälle zu einem organischen Ganzen verbindet. Doch halte ich es für methodisch richtig, erst die drei Fälle gesondert ohne innere Verknüpfung zu diskutieren.

Ganz analog den früheren Betrachtungen spielt auch hier die Drehungsbewegung die Hauptrolle, kann aber natürlich erst zur Geltung kommen, wenn wir C) 2 behandeln, nämlich den Fall, dafs der Kreis als fest angenommen wird, die Gerade als beweglich. An dieser Stelle des Unterrichts sind die Bewegungen des Kreises, so, dafs Z auf der Geraden, die durch die Punkte Z und P bestimmt ist, sich bewegt, die wichtigeren. Es geht aus diesen letzteren Bemerkungen hervor, dafs die Betrachtungen doch nicht ganz so einfach sind, als sie vielleicht auf den ersten Blick erscheinen, und dafs die Gewinnung der nötigen geometrischen Einsicht einer sicher leitenden Hand bedarf. Ist diese aber vorhanden, so werden die Schüler aus eigener Thätigkeit die richtige Anschauung gewinnen — übrigens auch durch die schon reichlich vorhandenen Vorübungen sich leicht und sicher in das Neue, das eigentlich nichts Neues mehr für sie ist, finden.

C) 1. Kreis und Punkt.

Nachdem aus meinen bisherigen Ausführungen deutlich hervorgegangen ist, wie ich diese gesamte Behandlung der Lagenverhältnisse verstanden und durchgeführt wissen will, würde ich fürchten, den Leser zu ermüden, wenn ich hier noch ausführlicher mich aussprechen würde.

C) 2. Kreis und Gerade.

Die drei möglichen Fälle sind natürlich dieselben, wie bei B) 3. Aber es ist doch notwendig, auf die Untersuchung hier näher einzugehen, da wir hier, wie ich oben schon angedeutet habe, die höchst fruchtbare Betrachtung anstellen können, dafs der Kreis fest liegt, während die Gerade die drei möglichen Bewegungen ausführt: Verschiebung in sich, Parallelverschiebung und endlich die wichtigste, die Drehung um einen festen Punkt.

Hier ist jetzt der Ort, die Lagen von Gerade und Kreis in voller organischer Verknüpfung aufzufassen und das innere Wesen aller hierher gehörigen Betrachtungen in voller Klarheit zu erfassen.

Ganz besonders wichtig ist hierbei die Auffassung der Verhältnisse, die sich ergeben, wenn wir die Gerade, nachdem sie einen Punkt mit dem Kreise gemeinsam gehabt hat, weiter drehen. Nicht nur ergeben sich die Sätze über den Zusammenhang von Zentralabstand und Sehne auf das Allernatürlichste — der sonst weitläufig bewiesene Satz, dafs die kleinere Sehne den gröfseren Abstand habe etc. —, es geht auch mit voller Klarheit ohne weiteren Beweis aus der Anschauung — und zwar der von sinnlichen Mängeln und Inkorrektheiten vollständig freien, d. h. der reinen Anschauung — hervor, dafs der Mittelpunkt der Sehne mit dem Nachbarpunkte von Z identisch ist.

Ich hoffe nicht, dafs ich hier Einwendungen begegnen werde, dafs die Strenge der Mathematik bei einer solchen Behandlungsweise leide; im Gegenteil, ich gebe mich der zuversichtlichen Hoffnung hin, dafs die Ansicht vorherrscht, die mein Rezensent Lindenthal[1]) ausgesprochen hat: „Den aus reiner Anschauung sich ergebenden Beweis nennt der Verf. mit Recht den strengsten.“[2])

Selbstverständlich ist, dafs überall den besonderen Fällen auch eine besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden mufs, so hier den beiden Lagen, wo die Sehne ihren kleinsten und ihren gröfsten Wert hat, während gleichzeitig der Zentralabstand den gröfsten resp. kleinsten Wert annimmt.

Überhaupt wird der einsichtsvolle Leser alle hier gegebenen Ausführungen nicht unter dem Gesichtspunkte auffassen dürfen, als wenn hier strenge Vorschriften bis ins Einzelnste hinein gegeben werden sollen; der Verfasser hat nur

---

[1]) Zeitschrift für das Realschulwesen. 16. Jahrg. 11. Heft.

[2]) J. K. Becker, Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage. Vorwort: „Giebt es in der That Sätze, welche mit vollkommener Sicherheit aus blofser Anschauung erkannt werden können, so ist nicht einzusehen, mit welchem Rechte „die Wissenschaft“ die Zahl dieser Sätze „zu vermindern“ sucht. Ist doch keine Einsicht überzeugender, als die aus unmittelbarer Anschauung gewonnene, und erhält doch alle durch Schlüsse gewonnene Erkenntnis ihre überzeugende Kraft erst auf Grund der anschaulichen Erkenntnis, von der sie ausgegangen! Man sollte darum meinen, es sei wissenschaftlich, so viel wie möglich auf die unmittelbare Anschauung zurückzuführen und erst, wo diese uns im Stiche läfst, zur Deduktion seine Zuflucht zu nehmen.“

den Gang dargestellt, wie er im Anfangsunterrichte verfährt, den er allerdings auf Grund seiner Erfahrungen nicht nur empfehlen kann, den er von seinem subjektiven Standpunkte aus als den allein richtigen ansieht.

Es folgt nun die letzte hierher gehörige Untersuchung

C) 3. Kreis und Kreis.

Fünf wesentlich verschiedene Lagen sind möglich.

1. Die beiden Kreise haben keinen Punkt gemeinsam; sie liegen aufsereinander. $z > r_1 + r_2$.

2. Die beiden Kreise haben einen Punkt gemeinsam; sie berühren einander von aufsen. $z = r_1 + r_2$.

3. Die beiden Kreise haben zwei Punkte gemeinsam; sie schneiden sich. $z \begin{matrix} < r_1 + r_2 \\ > r_1 - r_2 \end{matrix}$.

4. Die beiden Kreise haben einen Punkt gemeinsam; sie berühren einander von innen. $z = r_1 - r_2$.

5. Die beiden Kreise haben keinen Punkt gemeinsam; der eine Kreis liegt in dem andern. $z < r_1 - r_2$.

Diese Anordnung empfiehlt sich deshalb, weil man durch Bewegung von Fall zu Fall kommt und klar erkennt, wie allmählich der Übergang von dem einen zum nächsten erfolgt. Doch liefse sich selbstverständlich auch folgende Gruppierung vornehmen.

1. Die beiden Kreise haben keinen Punkt gemeinsam;
   a) sie liegen aufsereinander; b) der eine im andern.
2. Die beiden Kreise haben einen Punkt gemeinsam;
   a) sie berühren einander von aufsen; b) von innen.
3. Die beiden Kreise haben zwei Punkte gemeinsam; sie schneiden sich.

Wir wollen bei der Besprechung die erste Einteilung zu Grunde legen.

1. Die beiden Kreise haben keinen Punkt gemeinsam; sie liegen auseinander.

Wir verbinden die beiden Mittelpunkte mit einander Z_1 und Z_2. Die Strecke Z_1Z_2 heifst der Zentralabstand der beiden Kreise; die Gerade, die aus ihrer Verlängerung entsteht, heifst die Zentrale.

Auf der Zentralen haben wir sechs bemerkenswerte Punkte:

die beiden Zentren und zweimal zwei Schnittpunkte mit den Kreisen. Die des einen $\mathfrak{K}_1$ mögen A_1 und B_1, die des Kreises $\mathfrak{K}_2$: A_2 und B_2 heifsen, wo A_1 und A_2 als innere, B_1 und B_2 als äufsere Schnittpunkte anzusehen sind. Betrachten wir zunächst den Zentralabstand, so sehen wir, dafs er aus drei Strecken besteht: den beiden Radien $Z_1 A_1$, $Z_2 A_2$ und dem Stück $A_1 A_2$. Der Zentralabstand ist gröfser als die beiden Radien zusammengenommen und zwar um $A_1 A_2$. Es ergiebt sich sofort vermittels einer einfachen Betrachtung — man wird sich dabei auf die vorausgegangenen Untersuchungen stützen —, dafs A_1 und A_2 Nachbarpunkte sind. Denn zieht man zwei beliebige Radien und verbindet ihre Endpunkte, so ist dieser Weg von Z_1 nach Z_2 gröfser, als der Abstand $Z_1 Z_2$. Da nun der Weg wiederum aus den beiden Radien und einer dritten Strecke besteht, so mufs, da die Radien dieselben sind, diese Strecke gröfser sein, als $A_1 A_2$. A_1 und A_2 sind also Nachbarpunkte. B_1 und B_2 sind die resp. Gegenpunkte von A_1 und A_2; die Zentrale geht also aufser durch die Mittelpunkte der beiden Kreise durch diejenigen Punkte der Kreise, welche einander am nächsten liegen, sowie durch die, die am weitesten von einander entfernt sind. Man läfst nun den einen Kreis sich bewegen (dafs die angegebenen Betrachtungen bei allen möglichen Lagen der beiden Kreise durchgenommen werden, halte ich nach dem früher Dargelegten für selbstverständlich); unter diesen Bewegungen ist von besonderer Wichtigkeit die, bei der sich das Zentrum des bewegten Kreises auf der Zentralen bewegt, sodafs also diese Zentrale bleibt und ebenso A_1, A_2, B_1 und B_2 die Schnittpunkte der Zentralen und der beiden Kreise.

Läfst man nun Z_2 sich auf der Zentralen nach Z_1 hin bewegen, so wird, während r_1 und r_2 sich gleich bleiben, $A_1 A_2$ immer kleiner werden, bis schliefslich A_2 mit A_1 zusammenfällt. Wir haben den zweiten Fall, die beiden Kreise haben einen Punkt gemeinsam, sie berühren einander von aufsen. Der Zentralabstand ist gleich der Summe der beiden Radien. Ganz natürlich ist zugleich aus der Betrachtung ersichtlich, dafs die Zentrale durch den Berührungspunkt geht.

Bewegt man $\mathfrak{K}_2$ im selben Sinne weiter, so wird $z < r_1 + r_2$.

Die beiden Kreise haben zwei Punkte gemeinsam, sie schneiden sich. Man kann nun die beiden Schnittpunkte verbinden und so auf die gemeinsame Sehne zu sprechen kommen, auf die Lage der Schnittpunkte gegen die Zentrale und die daraus resultierende Lage der Sehne gegen die Zentrale.[1]) Bewegt man $\mathfrak{K}_2$ noch weiter, so wird als nächste bemerkenswerte Lage wieder der Fall eintreten, daſs die beiden Kreise nur noch einen Punkt gemeinsam haben, sich von innen berühren. Es wird der Zentralabstand gleich der Differenz der Radien sein.[2]) Er muſs also vorher gröſser als die Differenz gewesen sein; es kommt also zu der früheren Bedingung für den Fall des Schneidens zweier Kreise $z < r_1 + r_2$ als weitere einschränkende Bedingung hinzu: zugleich aber muſs $z > r_1 - r_2$ sein. Bei fortgesetzter Bewegung erhalten wir endlich den Fall, daſs der eine Kreis ganz im andern liegt, daſs sie keinen Punkt gemeinsam haben. Der Zentralabstand ist kleiner als die Differenz der Radien.

Ich habe im Vorstehenden vorzugsweise oder fast ausschlieſslich auf den Zentralabstand geachtet; selbstverständlich ist, daſs auch alle andern angeregten Betrachtungen in jedem einzelnen Falle angestellt werden müssen. So wird die Erörterung der Nachbarpunkte bei dem Durchgange von Z_2 durch $\mathfrak{K}_1$ interessante Beziehungen ergeben und uns zeigen, daſs wir es hier mit einem Grenzfall zu thun haben, da der frühere Nachbarpunkt plötzlich in seinem Gegenpunkte liegt. Auch die Diskussion der zwei Nachbarpunktpaare im dritten Fall wird Interesse erwecken. Besonders wertvoll aber wird es sein, die bei den Kreisen auftretenden Beziehungen in Verbindung zu setzen mit denen bei zwei Geraden.

Hiermit würde die allgemeine Lagenerörterung zu Ende geführt sein. Bei ausführlicher Behandlung und in Voraussetzung gründlicher Übungen und stets wechselnder Zeichnungen wird dieser Abschnitt natürlich einen groſsen Zeit-

[1]) An dieser Stelle würde vielleicht mit Vorteil die erste Anwendung der Symmetrielehre gemacht werden.

[2]) Gerade bei den Kreisbetrachtungen kommen uns die Übungen, die wir im Vergleichen, Addieren und Subtrahieren von Strecken angestellt haben, sehr zu statten.

raum in Anspruch nehmen. Das ist aber gewifs kein Schaden, denn der Gewinn für das Anschauungsvermögen, sowie für das mathematische Denken ist andererseits ein sehr grofser. Auch die Aufstellung der verschiedenen möglichen Fälle, die naturgemäfse Anordnung, die Kombination verschiedener Bedingungen, sowie der Umkehrungen ist von entscheidendem Werte. Besonders die Behandlung der Umkehrungen mufs eine sehr sorgfältige sein, da man auf diese Weise einen tiefen Einblick in die Verhältnisse gewinnt, der, weil der Gesichtspunkt, von dem man ausgeht, ein anderer ist, vollständige Klarheit schafft.

An die Lagenbetrachtungen würde sich nun die besondere Erörterung der Parallelen und der Winkel anzuschliefsen haben, die wir aber hier jetzt nur erwähnen wollen, weil wir diesen beiden eigene Kapitel widmen werden.

Von hierher gehörigen Arbeiten sind es zwei, die zuerst erwähnt zu werden verdienen, die schon oben in einer Fufsnote erwähnte von Gille und eine von Dieckmann.

Im 32. Hefte der Lehrproben und Lehrgänge findet sich p. 94 ein Aufsatz von Dr. A. Gille (Cottbus): Didaktisches aus dem planimetrischen Unterricht.

Nr. 3 dieses Aufsatzes ist überschrieben: Aufbau des Lehrstoffes im Ganzen und im Einzelnen.

Nachdem der Verfasser auf die Vorwürfe, die sich gegen Euklid richten, eingegangen und besonders den Schlömilchschen Versuch in seiner Geometrie des Mafses eine organische Gliederung zu geben besprochen hat, giebt er selbst einen andern organischen Aufbau, den er mit folgenden Worten einleitet: „Nachdem der Schüler aus der Aufgabe der Planimetrie ersehen hat, dafs sie nur mit den Elementen Punkt und Linie und zwar zunächst nur mit der geraden Linie sich beschäftigt, ergiebt sich doch wohl als natürlichster Gang der Untersuchung, der dem Schüler von vornherein zur Klarheit zu bringen ist:

A) Der Punkt.

B) Die Gerade.

C) Punkt und Gerade.

D) Gerade und Gerade. a) Zwei Gerade. b) Drei Gerade.

Bei der Untersuchung des vorletzten Teiles [D) a] ergiebt sich sofort aus der Zeichnung der möglichen Lagen der Geraden zu einander eine Gliederung nach 1. zwei sich schneidenden Geraden und 2. zwei parallelen Geraden."

Der Verfasser kommt dann in D) b auf diejenigen Untersuchungen, die wir in dem Kapitel über die Anwendungen der Winkel- und Parallelenlehre bringen werden. Es heifst dann weiter:

„Beispielsweise gestaltet sich auch der Aufbau der Kreisuntersuchung ganz natürlich nach folgendem Gange:

A) Kreis und Punkt.
B) Kreis und Gerade.
  I. Kreis und eine Gerade.
  II. Kreis und zwei Gerade.
  III. Kreis und Dreieck.
  IV. Kreis und Viereck.
  V. Kreis und Vieleck.
C) Kreis und Kreis.

Auf diese Weise baut sich der ganze Unterrichtsstoff in einer Reihe organisch sich aneinander anschliefsender Einheiten auf."

Der Verfasser greift dann den Fall heraus, zwei Parallele und eine Schneidende, um daran seine Methode zu zeigen. Er sagt: „Das erste ist, dafs die neuen Begriffe, welche hier eintreten, ins rechte Licht gestellt und benannt werden." . . . „Der erste Schritt ist also wesentlich Definition. Nun erst kann man zum Untersuchen der neuen Begriffe, d. h. zum Aufsuchen von Beziehungen der Gröfse oder der Lage weiterschreiten."

Sehr richtig bemerkt der Verfasser sodann, dafs die Schüler durch Anschauung das Richtige vermuten werden, dafs es aber notwendig sei, auch das mathematische Mufs darzuthun. Dann nennt er als zweites die Behandlung der besonderen Fälle und sagt: „Endlich gilt es noch, die gewonnene Erkenntnis zu verwerten und einzuprägen in mannigfachen Übungen, welche auszuführen der Schüler aus eigener Kraft imstande sein mufs."

„Die Behandlung der didaktischen Einheit schreitet also

in folgendem Gange fort: 1. Erklärung der neuen Begriffe. 2. Untersuchung derselben: Ergebnis, Lehrsatz. 3. Vertiefung der gefundenen Ergebnisse: Umkehrungen und Folgerungen. 4. Übungen."

Als ausführliches Beispiel giebt der Verfasser sodann die systematische Behandlung der Kreislehre und behandelt dann in Nr. 4, Zur Entwicklung der Selbstthätigkeit im planimetrischen Unterrichte, die Wirkungen eines im obigen Sinne geleiteten Unterrichts.

Es zeigt sich also, dafs der Verfasser im wesentlichen auf unserem Standpunkte steht: doch glaube ich, dafs, wenn man das betonte Prinzip einführen und mit Erfolg anwenden will, es in der ausführlichen Weise geschehen mufs, die wir oben geschildert haben. Gerade das Fehlen des ersten Falles, Punkt und Punkt, scheint uns ein wesentlicher Mangel in den Ausführungen des Verfassers. Dafs wir aber im übrigen seine didaktischen Ansichten teilen, geht zur Genüge aus unserer Behandlung der Lagenuntersuchungen hervor.

Der Aufsatz von Dieckmann findet sich in Hoffmanns Zeitschrift, 24. Jahrgang, Heft 2, p. 84. „Bewegung und Umformung. Eine methodische Skizze. Von Prof. Dr. Josef Dieckmann in Viersen."

Auch dieser Aufsatz widmet den Reformbestrebungen auf dem Gebiete des planimetrischen Unterrichts die Einleitung. (Unsere Studie über diese Reformbestrebungen im ersten Bande dieses Werkes scheint dem Verfasser nicht bekannt zu sein.) Besonders ein Ausspruch Cauers wird zitiert, in welchem Cauer fordert, dafs der mathematische Unterricht lebensvoller und anschaulicher gestaltet werden müsse.

Im weiteren tritt der Verfasser für die ausgiebige Benutzung der Bewegung ein, zum Teil in anderer Weise wie wir. So läfst er z. B. bei den Kreisbetrachtungen den Kreis sich konzentrisch erweitern. Man sieht, dafs sich diese Untersuchungen leicht mit den unsrigen kombinieren lassen. Sie würden da einzuschalten sein, wo wir den Kreis so verschieben, dafs der Mittelpunkt auf der Zentralen sich bewegt. Auf die Bemerkungen des Verfassers über Bewegung selbst werden wir in dem Kapitel, Geometrische Begriffe, zu sprechen

kommen. Im übrigen zeigt der Verfasser dann an mehreren Aufgaben, wie er die Bewegung verwertet wissen will.

Von sonstigen Aufsätzen in der Hoffmannschen Zeitschrift seien noch folgende erwähnt.

Bd. 1 H. Kiessling, Das geometrische Zeichnen als Grundlage für den mathematischen Unterricht. p. 47—59. Wir glauben, dafs die dort vorgebrachten Ideen sich recht gut mit dem von uns vertretenen Standpunkte vereinigen lassen würden.

R. Sturm, Die neuere Geometrie auf der Schule. p. 474 bis 490.

Sturm betont die Wichtigkeit des geometrischen Unterrichts vor dem arithmetischen, „denn ihr (der Geometrie) wohnt eine viel gröfsere Bildungskraft inne", tritt für die synthetische Geometrie ein, weil „das Formelwesen der analytischen Geometrie die Anschauung meistens unterdrückt" und empfiehlt das Buch von Geiser. In der weiteren Ausführung finden sich folgende bemerkenswerten Sätze:

„Die alte Euklidische Geometrie ist vorzugsweise eine Geometrie des Mafses und diesen Charakter hat unsere Schulgeometrie auch mit angenommen: diese mufs von der neueren Geometrie, die ja oft geradezu Geometrie der Lage heifst, mehr und mehr eine gröfsere Berücksichtigung der Lage lernen."

„Den Vergleich der verschiedenen Lagen z. B. eines Kreises und einer Geraden zu einander mufs der Schüler wiederholt durchmachen, sodafs er als feste Erkenntnis davonträgt, dafs die eine — die Tangentiale — unwahrscheinlich ist im Vergleich zu den beiden andern, zwischen denen sie eben nur die — momentane — Übergangslage ist, und also im allgemeinen nicht anzunehmen ist, und wenn sie stattfindet, notwendig begründet werden mufs."

„Auch des Unterschiedes mufs schon der Schüler sich bewufst werden, ob durch gewisse Bedingungen ein Gebilde so bestimmt ist, dafs noch unendlich viele Lösungen möglich sind oder nur eine endliche Zahl oder gar keine . . ."

„Lassen wir so die geometrischen Gebilde aus ihrer Starrheit hervortreten und sich bewegen, verändern und vermehren,

so wird dies gewifs wesentlich zur Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens beitragen und das Lebendigwerden des Materials, mit dem der Schüler zu thun hat, wird sicher sein Interesse auch mehr fesseln.“

Der Verfasser schliefst seinen Artikel mit einer Anpreisung des Gesetzes der Reziprozität (Dualität, Polarität), dessen Anwendung resp. Anwendbarkeit im planimetrischen Unterrichte er an verschiedenen Beispielen zeigt.

In Grunerts Archiv Bd. 8, p. 365 findet sich ein Aufsatz: Über geradlinige Raumgebilde, die einfacher sind als das Dreieck, und über deren Verwendung zur Fundamentallehre der Geometrie von Dr. W. Matzka. Dem Verfasser scheint ebenfalls der Anfangsunterricht in der üblichen Form nicht zugesagt zu haben, doch setzt er unseres Erachtens nicht an der richtigen Stelle mit seinen Änderungsvorschlägen ein. Er sagt: „Untersucht man jedoch die möglichen noch einfacheren Raumgebilde (als das Dreieck), so findet man deren zwei, die bisher der Aufmerksamkeit der Geometer entgangen zu sein scheinen, und die dennoch zu einer natürlichen Grundlage der Geometrie geeigneter sein dürften, als das Dreieck, nämlich:

1. Das System einer ganzen Geraden mit einem Punkte aufser ihr,

2. Das System zweier parallelen ganzen Geraden, das wir kurzweg ein Parallelenpaar nennen wollen.“

Der Verfasser sucht dann nachzuweisen, dafs hier thatsächlich die einfachsten Raumgestalten vorliegen und dafs sie sich zur Aufstellung einer Fundamentallehre der Geometrie besonders eignen; in einem zweiten Abschnitte giebt er dann Proben, wie er das Parallelenpaar verwertet wissen will.

In der folgenden Zusammenstellung werde ich nun die hervorragendsten Proben geben von den Versuchen, den Anfangsunterricht in der Planimetrie anders zu gestalten. Ich hoffe, dafs mir nichts Wesentliches entgangen ist. Über die Art, wie ich hier zitieren sollte, war ich im Zweifel: es lag die Gefahr nahe, allzu umfangreiche Zitate geben zu müssen. Ich habe mich daher im wesentlichen darauf beschränkt, den Aufbau anzudeuten, die Einzelheiten der Ausführung aber

wegzulassen. Wessen Interesse durch das Gebotene geweckt wird, kann ja dann leicht das betreffende Werk selbst zum Gegenstand seines Studiums machen. Verschiedene Lehrbücher hätten vielleicht noch Erwähnung verdient; da aber in ihnen nur Ansätze zu einer Änderung sich fanden, oft auch die Konsequenzen nicht gezogen wurden, so habe ich von ihnen abgesehen. Gleich hier will ich bemerken, dafs die beiden Fragen Parallelismus und Winkel in besondern Kapiteln bearbeitet werden und dafs ich auch da auf dem Standpunkte stehen werde nur zwei Elemente zu verwenden, einmal zwei Gerade, dann zwei Strahlen. Das an die beiden Kapitel sich anschliefsende Kapitel wird dann zuerst mit drei Elementen sich beschäftigen, wobei ich unter dem Titel Anwendungen der Parallelen- und Winkellehre alles das zur Sprache bringen werde, was sich gewöhnlich direkt an die Behandlung von Parallelen und an die Definition vom Winkel anschliefst.

Arneth, System der Geometrie. — Stuttgart 1840.

In diesem Lehrbuche findet sich folgende Einteilung des ersten Abschnittes.

„§ 1. Gröfse und Lage oder Richtung einer Geraden.
§ 2. Vergleichung der Gröfsen zweier Geraden.
§ 3. Gegenseitige Lage zweier Geraden.
§ 4. Von der geneigten Lage. (Winkellehre.)
§ 5. Von der parallelen Lage.“

Hieran schliefsen sich direkt trigonometrische Untersuchungen und daran Koordinatengeometrie.

J. H. T. Müller, Lehrbuch der Geometrie. — Halle 1844 giebt eine äufserst ausführliche Darstellung der Lagenverhältnisse, indem er von der Frage ausgeht „Welche Zusammenstellungen erhält man, wenn von Punkten, Geraden und Ebenen, die hier immer als unbegrenzt anzunehmen sind, je zwei genommen werden?“

Die ganze Winkellehre wird dabei auch abgehandelt. Unter andern findet sich ein Abschnitt: „Von der Bestimmung der gegenseitigen Lage zweier Geraden aus den Lagen, welche

diese gegen eine dritte haben, wenn diese Linien nicht in einerlei Ebene liegen.“

Die Betrachtungen werden in einem Anhange noch vertieft. In diesem findet sich z. B. ein Abschnitt: „Bestimmung der möglichen Lagen von Punkten, Geraden und Ebenen zu je dreien genommen.“

Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie.[1]) — Jena 1851.

I. Buch. Der Punkt.

1. Abhängigkeit der Elemente; 2. Gröfse; 3. Form; 4. Lage. Hier heifst es: „Liegen mehrere Punkte aufser einander, so kann blofs von der Ordnung, in welcher sie aufgefafst werden sollen oder können, die Rede sein. Die ganze Frage wird durch die Kombinationsoperationen und Kombinationszahlen beherrscht. Die ersteren sind logisch, die letzteren arithmetisch.“

Im Übungsstoff finden sich Aufgaben, wie die folgende: Verbinde fünf Punkte auf alle möglichen Weisen zu einem Fünfeck.

II. Buch. Die gerade Linie.

1. Abhängigkeit der Elemente; 2. Gröfse; 3. Form; 4. Lage. A) Zwei Gerade (besser müfste es heifsen: zwei Strecken). Es werden drei Hauptlagen unterschieden, deren erste 8 besondere Fälle aufweist. Bei der eingehenden Erörterung ergiebt sich der Winkel, der ausführlich betrachtet wird. Daran knüpfen sich wieder Lagenuntersuchungen zweier Winkel. Dann kommt die Lehre von den Parallelen, dann B) drei Gerade;[2]) C) vier Gerade; D) beliebig viele Gerade.

III. Buch. Figur.

---

[1]) Vorrede: „Dafs nach der Anlage des Ganzen der Unterschied von analytischer und synthetischer Geometrie, von der Geometrie des Mafses und der Lage aufgehoben ist, leuchtet wohl von selbst ein.“

„Ich habe mich bemüht, rein aus dem Wesen der Sache zu entwickeln, weil diese Art mir vom wissenschaftlichen sowohl als pädagogischen Standpunkte die einzig rechte erscheint.“

[2]) Ich halte es demgegenüber für wesentlich, gleich den Kreis mit in die ersten Untersuchungen über die Lage zweier Gebilde hineinzuziehen.

August, Lehrbuch der Mathematik. — Berlin 1852.

Der dritte Abschnitt „Von Punkten, Linien und Winkeln“ bietet eine Reihe von sogenannten Lehrsätzen über die Lage von Punkten gegen einen Kreis mit Scheinbeweisen; daran schliefsen sich Sätze über Winkel. Der folgende Abschnitt handelt von der Kongruenz.

Gernerth, Grundlehren der eb. Geometrie. — Wien 1857. bespricht an verschiedenen Stellen die Lagenbeziehungen von Raumgebilden, so § 6, 7, 16, 17 und besonders § 34: Vergleichung von Kreisen bezüglich ihrer Gröfse und ihrer Lage. Hier heifst es: „Sind zwei Kreise exzentrisch, so sind drei verschiedene Fälle möglich; die Peripherieen derselben haben entweder 1. keinen Punkt, oder 2. einen Punkt, oder 3. zwei Punkte mit einander gemeinschaftlich.“ Die möglichen Lagen werden dann erörtert und auch auf die Abstandsbeziehungen Rücksicht genommen.

Hubert Müller, Leitfaden der eb. Geometrie. — Leipzig 1874.

I. Der Punkt, die Gerade und der Kreis.
   Lagen von Punkten und Geraden.
   (Winkel und Strecken. Messen der Strecken.)
   Der Kreis.

II. Von den Parallelen.

Hubert Müller, Leitfaden. — Leipzig 1889.

I. Die Grundgebilde.
   Lagen von Punkten und Geraden.
   (Winkel und Strecken.)
   Symmetrie in Bezug auf eine Axe.
   Symmetrie in Bezug auf einen Punkt.
   (Nebenwinkel, Scheitelwinkel, Sätze über symmetrische Figuren, Winkelbezeichnungen.)
   Zwei Gerade, welche von einer dritten geschnitten[1]) werden.

---

[1]) Hubert Müller hat in der dritten Auflage die Betrachtungen über den Kreis ausgeschieden; dafür hat die Symmetrielehre eingehende Berücksichtigung gefunden.

Gilles, Lehrbuch der eb. Geometrie. — Heidelberg 1877.

Im § 8 werden „die Beziehungen zweier geraden Linien gegen einander“ besprochen.

„Da die gerade Linie durch zwei Punkte oder durch einen Punkt und eine Richtung bestimmt ist, so sind zwei Betrachtungen möglich:

Erstens: Die beiden Geraden haben a) keinen, b) einen, c) zwei oder mehr Punkte gemeinschaftlich.

. . . .

Die zweite, die fruchtbarere Betrachtungsweise ist folgende: Die Gerade ist bestimmt durch einen Punkt und eine Richtung, in welchen Angaben das ganze Wesen der Geraden enthalten ist. — Es sind folgende Fälle möglich:

1. Der Ausgangspunkt ist gemeinschaftlich.
2. Der Ausgangspunkt ist verschieden.

In jedem dieser beiden Fälle ist entweder die Richtung dieselbe oder verschieden.“

Hieraus ergeben sich also vier mögliche Fälle.

E. E. Müller, Versuch einer organischen Entwicklung der Geometrie vermittelst elementarer Vereinigung der Geometrie des Maſses mit der Geometrie der Lage.[1]) — 1877. Progr. Nr. 538.

p. 4: System der Geometrie des Maſses und der Lage.

Erste Abteilung.
Konstruierende Geometrie.
Erster Abschnitt.
Konstruierende Planimetrie
oder
Die durch die Elemente von drei in einer Ebene liegenden ebenen Strahlenbüscheln bestimmten Gebilde.
(Lehre vom Dreipunkt.)

---

[1]) Man vergleiche auch desselben Verfassers:

1. Elemente der Planimetrie, streng systematisch. — Braunschweig 1869.
2. Disposition und Fragmente einer streng wissenschaftlichen Raumlehre. Im fünften Bande des „Pädagogischen Archivs“ 1863. p. 641.

Einleitung. Logische Grundlagen des Systems.
a) Definitionen (Erklärungen).
b) Postulate (Forderungen).
c) Axiome (Grundsätze).

Erstes Buch. Die durch die Strahlen dreier ebener Strahlenbüschel bestimmten kongruenten oder inkongruenten Gebilde.

Erstes Kapitel. Die eine der durch drei Punkte gegebenen Zentralstrecken
a) für sich;
die gegenseitige Bestimmung zweier Punkte einer Geraden mittelst ihres Abstandes;
b) nebst dem Kreise um den einen der Grenzpunkte;
Vergleichung der Abstände und der Lage zweier Punkte einer Ebene von und zu einem dritten;
c) nebst den Kreisen um beide Grenzpunkte;
Addition, Subtraktion und geometrisches Verhältnis zweier Strecken überhaupt.

Zweites Kapitel. Zwei der durch drei Punkte gegebenen Zentralstrahlen in ihrer Beziehung zu den andern Strahlen des sie enthaltenden ebenen Strahlenbüschels.

Die gegenseitige Bestimmung der Strahlen und Winkel eines ebenen Strahlenbüschels.

Drittes Kapitel. Zwei der gegebenen Zentralstrahlen und der sie enthaltende ebene Strahlenbüschel in Beziehung auf den dritten Zentralstrahl als Transversale des Büschels, projektivische Beziehung der Büschelstrahlen und der Transversalpunkte.

Die gegenseitige Bestimmung der von den Strahlen und der Transversale des Büschels gebildeten Strecken und Winkel und Elemente überhaupt nach Größe und Lage; Kongruenz und Inkongruenz der Dreiecke, resp. *n*ecke; die gegenseitige Beziehung des Neben- und Gegensystems zu einander und zum Hauptsysteme nach Größe und Lage, die Symmetrie; Fundamentalaufgaben; die parallelen, die nichtparallelen wie antiparallelen Geraden und die von ihnen mit einer Transversalen gebildeten Winkel.

Schlegel, Lehrb. d. element. Mathematik. II. — Wolfenbüttel 1879.

In diesem Lehrbuche werden nach der Einleitung folgende Betrachtungen angestellt.

„I. Geometrie der bewegten Gebilde.

I. Geometrie der Geraden.

Der Punkt und seine Bewegung auf der Geraden.

Die Strecke und ihre Bewegung auf der Geraden.

II. Geometrie der Ebene.

a) Die Gerade und ihre Bewegungen in der Ebene.
   1. Lagenänderung der Geraden.
   2. Richtungsänderung der Geraden. Der Winkel.

b) Die Strecke und ihre Bewegungen in der Ebene.
   1. Lagenänderung der Strecke. — Das Parallelogramm.
   2. Richtungsänderung der Strecke. — Die Kreisfläche.“

Schindler, Die Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883.

Die Einleitung behandelt nach der Erörterung der Grundbegriffe „§ 13. Zwei Punkte; § 14. *n* Punkte; § 15. Die Parallelen; § 16. Der Kreis; § 17. Der Winkel; § 18. *n* verschieden gerichtete Gerade; § 19. Die Gleichheit der Linien.“

Frankenbach, Lehrbuch der Mathematik. — Liegnitz 1889 giebt als Einführung in die Geometrie: A) Allgemeines über geometrische Gebilde. B) Die einfachen Lagenbeziehungen der Grundgebilde.

1. Punkt und Gerade; 2. Punkt und Ebene; 3. Zwei Gerade; 4. Gerade und Ebene; 5. Zwei Ebenen.

p. 10 beginnt die Planimetrie.

I. Die Lage zweier Geraden.
   A) Von den Winkeln.
   B) Von den Parallelen.

II. Die ebenen Figuren.

Auch hier finden sich Abschnitte über die Lagen von Gebilden. § 26. Der Kreis und der Punkt; § 27. Der Kreis und die Gerade. Die drei möglichen Lagen werden in diesem Paragraph erörtert. Doch geht der Verfasser vom Abstand

aus, nimmt ihn zur Voraussetzung, während wir den entgegengesetzten Weg einschlugen. — Die Lage zweier Kreise findet sich im § 43 behandelt. Man sieht, die Lagenbetrachtungen sind sehr auseinander gerissen.

II. Kapitel.

Der Winkel.

Die Erörterung des vorliegenden Begriffes ist von mir schon vor einer Reihe von Jahren in der Hoffmannschen Zeitschrift (Bd. XX, p. 481—501) versucht worden. Da der Artikel eine Reihe weiterer Arbeiten veranlafst hat, die sich mit demselben Gegenstande beschäftigen, so darf ich wohl diesen Artikel zum Ausgangspunkte der jetzigen Betrachtungen machen; zum Theil werde ich die dortigen Ausführungen wörtlich reproduzieren können, im übrigen mufs ich auf den Artikel selbst verweisen, da eine Anzahl der dort berührten Fragen teils in der Einleitung zum ersten Bande des vorliegenden Werkes ihre Erledigung gefunden haben, teils durch die Untersuchungen des ersten Kapitels dieses zweiten Bandes abgeschlossen sind.

Den Anlafs zu dem Artikel gab Herr Dr. Wimmenauer in Hoffmanns Zeitschrift Bd. XIX, p. 261, indem er dort darauf aufmerksam machte, dafs bezüglich der Definition des Winkels eine bedeutende Verschiedenheit bestehe, und eine Einigung anregte. Am selben Orte p. 262 finden sich einige Bemerkungen von Hertter zu einem Aufsatze Hoffmanns in Bd. XVI, p. 340. Hoffmann führt l. c. aus, dafs die Definition des Winkels als eines Ebenenstückes nicht richtig sei.

„Winkel ist nicht ein Stück (Ausschnitt) der Ebene, also Ebene selbst, sondern nur das dem Ebenenstück Form gebende, durch Drehung erzeugte Liniengebilde; er ist die primitivste (noch offene) Figur. Form (Figura) erhält die Ebene (oder überhaupt eine Fläche) erst durch Umgrenzung. Durch die Gerade erhält die Ebene noch nicht Form; es mufs erst die Richtungsänderung (der Geraden) hinzutreten und das ein-

fachste geradlinige Gebilde mit Richtungsänderung ist eben der Winkel. Winkel ist also nicht der von den Schenkeln abgegrenzte nach einer Seite noch offene (unbegrenzte) Flächen- (resp. Ebenen-)Raum, sondern nur das diesem Flächenstücke Form (Gestalt) gebende, durch Drehung erzeugte und daher der Vergröfserung und Verkleinerung fähige Liniengebilde."

Hoffmann kommt damit auf den Kernpunkt der Frage, nach dessen Beantwortung sich die Definition des Winkels erledigen mufs. Es ist nämlich zu beachten, dafs wir Winkel rein äufserlich auffassen können als Figur, als das, was sich der Anschauung darbietet;[1]) in diesem Falle würde die Definition lauten müssen: Winkel ist ein von zwei Strahlen mit gemeinsamem Ausgangspunkte gebildete Figur, oder: Winkel ist ein Zweistrahlengebilde.[2])

Es ist einleuchtend, dafs uns durch diese Definition über das eigentliche Wesen des Winkels gar nichts gesagt ist, ja dafs eine grofse Unsicherheit dabei zurückbleibt, weil wir über die Beziehungen der beiden Strahlen zu einander gar nichts erfahren und doch erst die besondere Art, wie wir die beiden Strahlen in ihrem Zusammenhange aufzufassen haben, uns das liefert, was den Winkel definiert.

Es ist hier auch der Ort, auf eine Abhandlung Bürklens einzugehen, die er im Korrespondenzblatt f. d. Gel.- und Realsch. 1891 veröffentlicht hat. Es heifst dort, p. 4:

„Von was hat nun die erste Erklärung des Winkels beim Unterricht auszugehen? Jedenfalls von der Anschauung, vom

---

[1]) Becker, Von den Inkorrektheiten in der Sprache der Mathematik; H. Z. II, p. 96: „Die Definition des Wortes Winkel hat den Mathematikern von jeher viele Schwierigkeiten gemacht; aber nur deshalb, weil sie sich meist der anschaulichen Erkenntnis verschliefsen. Der einzige Schweins scheint mir den Nagel auf den Kopf getroffen zu haben, als er den Winkel einfach als das durch zwei in einem Punkte zusammentreffende gerade Linien erzeugte offene Gebilde definierte, wozu allerdings das zwischenliegende Stück der Ebene gehört."

[2]) Vergl. Becker, Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage, p. 16: „Ursprünglich ist wohl unter einem Winkel, wie schon daraus hervorgeht, dafs man von seinem Scheitel und seinen Schenkeln spricht, nichts anderes verstanden worden, als eine Figur, welche er darstellt."

Seienden; es ist also zunächst, ähnlich wie bei der ersten Auffassung der Strecken, von der Bewegung abzusehen. Und wenn ferner in der Definition nicht alles zu sagen möglich und nötig ist, was in den Begriff hineingetragen werden kann, was für Forderungen hat dann jeweils die Definition zu erfüllen? W. Wundt[1]) sagt: „Als systematische Form sucht sie — die Definition — einen gegebenen Begriff auf das schärfste von den verwandten Begriffen zu trennen; als nächstes Ergebnis einer Untersuchung, welcher die Begrenzung der Begriffe erst zu einem tieferen Eindringen in den Gegenstand verhelfen soll, kann sie nicht das Wesen der letzteren erschöpfend bestimmen wollen, sondern muss sich unter Hervorhebung derjenigen Elemente begnügen, welche zur sichern Unterscheidung zureichend sind.“ H. Hankel[2]) sagt: „Mathematische Definitionen haben, soweit sie nicht Fixierung des Sprachgebrauchs betreffen, nur diejenigen wesentlichen Eigenschaften des zu Erklärenden anzugeben, welche zur weiteren Entwicklung und zur Verknüpfung eines Begriffs mit anderen notwendig erscheinen“. Ich möchte daher vorschlagen, einfach zu sagen: „Das durch 2 von einem Punkte ausgehende Strahlen erzeugte Gebilde heifst Winkel“. Ähnliches ist zwar schon öfter geschehen, aber fast niemals, ohne dafs nicht in Zusätzen noch der Richtungsunterschied oder dergl. angehängt worden wäre.“

Bürklen fährt dann fort:

„Mit der vorgeschlagenen Definition ist nun allerdings nicht viel über den Winkel gesagt,[3]) aber er ist dadurch von jedem andern geometrischen Gebilde, vom Strahlenbüschel, vom Dreieck, Dreikant etc. völlig scharf und eindeutig unterschieden.“

Aber hierauf allein kommt es nicht an; Wundt betont zwar ausschliefslich die Abgrenzung des Begriffs gegen verwandte, der Mathematiker Hankel aber verlangt in der Definition „die wesentlichen Eigenschaften, welche zur wei-

[1]) Logik II, S. 34.

[2]) Theorie der komplexen Zahlen, S. 48.

[3]) Völlig unsere Ansicht — nicht nur „nicht viel“, sondern wesentlich nichts.

tern Entwicklung und zur Verknüpfung mit andern notwendig erscheinen." Vor allen Dingen fehlt, wie ich schon oben bemerkte, in dieser Definition jeder Hinweis auf den Zusammenhang, in welchem die Elemente des definierten Begriffs aufzufassen sind. Dafs dies Bürklen selbst nicht entgangen, zeigen die Worte p. 5:

„In welcher Beziehung das so bestimmte Gebilde zur Ebene steht, ob es eine Gröfse hat — was grofs an ihm sei — und ob diese mefsbar, das alles hat erst die folgende Untersuchung zu entscheiden."

Damit steht denn aber die Definition doch sehr arm an wissenschaftlicher Bedeutung da, zumal gilt „Die Gröfse ist freilich diejenige Seite am Winkel, auf die man am meisten zu sehen hat", wenn auch „so wenig die Gröfsenmessung die alleinige Aufgabe der Geometrie bedeutet, so wenig das Wesen eines Gebildes ausschliefslich an seine Gröfse gebunden ist".

Der weitere Inhalt der Abhandlung wird uns noch weiter unten beschäftigen.

Kehren wir zur Definition selbst zurück, so ist ferner als ganz wesentlich zu beachten, dafs diese Definition deshalb als ganz unzureichend zu bezeichnen ist, weil der Winkel unverändert bleibt, wenn man die Figur verändert;[1]) damit tritt denn diese Definition in Gegensatz zu jeder anderen Figurenerklärung. Ich werde hierauf noch zurückzukommen haben. Hier handelt es sich jetzt noch um den Hoffmannschen Artikel. Es heifst dort weiter: „Die zweite Definition (Gröfse der Drehung) aber, welche nur das Merkmal der Drehung berücksichtigt, ist u. E. zu eng, denn sie ignoriert das Merkmal der Formgebung oder Gestaltung, was gerade das Wesen des Winkelgebildes ausmacht."

---

[1]) Becker, Geometrie auf neuer Grundlage: „Später sah man sich jedoch veranlafst, bei der Vergleichung der Winkel . . . von der Länge der ihn bildenden Schenkel zu abstrahieren und einen Winkel als unverändert anzusehen, wenn seine Schenkel beliebig verlängert oder verkürzt werden. Da aber durch diese Veränderung der Schenkel die Figur eine andere wird, bleibt als Inhalt des Begriffes Winkel nur noch eine von der Länge der Schenkel unabhängige Eigenschaft der Figur übrig."

Auch in einem Artikel des XX. Bandes kommt Hoffmann wieder auf diese Erklärung zurück, die er übrigens auch schon in einem Aufsatze „Studien über geometrische Grundbegriffe“ im III. Bande seiner Zeitschrift verfochten hat. Dort heifst es (p. 532): „. . ., so grenzen die Richtungsstrahlen ein Ebenenstück ab, welches nach einer Seite hin noch offen, eine beliebige (gerad- oder krummlinige) Schliefsung oder Begrenzung zuläfst. Dieses offene Linien- oder besser Strahlengebilde, welches aus der allgemeinen Ebene ein Stück, einen Sektor, abgrenzt, aber nicht ein- oder umschliefst, heifst bekanntlich Winkel. Der Winkel giebt den Unterschied zweier Richtungen von demselben Punkte aus an. Er giebt aber auch zugleich dem Flächenstück (Sektor) die Form, er gestaltet es. Mit dem Winkel oder mit dem Wechsel der Richtung beginnt die Form, er ist das Urelement der Form.“[1])

Im XX. Bande führt Hoffmann aus, entgegen der gewöhnlichen Ansicht, dafs zur Figur das Geschlossensein nicht als notwendiges Merkmal gehöre. Figur sei Form. p. 410: „Wo beginnt aber die Form? Strecke hat m. E. noch keine Form, sie ist formlos. Die Form hat ihre Wurzel (ihren Ursprung) in der Richtungsänderung, und diese beginnt mit dem Winkel... Der Winkel ist ein einem Ebenenstück die Form gebendes Liniengebilde. Er ist... der Embryo der Form.“

Hoffmann schlägt für die Winkelgebilde den Namen „Eck“ oder „Eineck“ vor. „Mit der Gröfse und Form des Winkels wird sich natürlich auch das Eineck in seiner Gröfse und Form ändern.“

---

[1]) Hierzu bemerkt Hoffmann in einer Fufsnote: „Will man den Winkel im Raume als formendes Element, abgesondert von der Fläche, anschaulich darstellen, so geschieht dies am besten durch einen Winkel von Draht oder gespannten Fäden.“ Vergl. die Zeitschrift Heft II, S. 123 u. 128, Anm.: „Im Wechsel der Richtung liegt der Keim zur Form.“ Eine Gerade ist auch formlos. Es könnte zwar das Aussehen des gestreckten Winkels diese Behauptung zu widerlegen scheinen. Doch ist bekanntlich ein wesentlicher Unterschied zwischen einer Geraden und dem gestreckten Winkel in der psychischen Verfolgung ihrer Erzeugung.“

„Durch diese Auffassung des Winkels als Figur gewinnt die Definition des Winkels mehr Licht und Halt.“

Hoffmann faſst also den Winkel, wie er übrigens ausdrücklich selbst hervorhebt, nur als Figur und hebt als besonderen Vorzug dieser Definition hervor, daſs dadurch der Winkel unabhängig sei gegen den Begriff der Drehung und die damit zusammenhängenden Begriffe.[1]) Unsere Bedenken gegen diese Definition sind schon oben kurz, aber im wesentlichen angegeben. Hoffmann selbst hätten doch Bedenken aufstoſsen müssen, da es sich erst als notwendig erwies, Figur anders zu definieren. Ferner ist der Zusammenhang zwischen Eineck und Winkel nicht klar, die Definition erhält dadurch aber etwas so Schwankendes, daſs das, was der Verfasser vermeiden wollte, erst recht in die Erscheinung tritt.

Sehen wir von der Hoffmannschen Erklärung ab, so können wir die von den verschiedensten Autoren aufgestellten Winkeldefinitionen in drei Gruppen teilen:

1. Der Winkel ist Richtungsunterschied.[2])
2. Der Winkel ist ein Ebenenstück.
3. Der Winkel ist die Gröſse der Drehung.

Doch ist hierbei zu bemerken, dass fast alle Lehrbücher, die eine andere Erklärung als die dritte geben, einen Zusatz haben, in dem auf den Zusammenhang von Winkel und Drehung hingewiesen wird. Diese wichtige Thatsache kann schon an und für sich lehren, daſs das eigentliche Wesen des Winkels mit der Drehung eng zusammenhängt und daſs eine Definition, die auf eine wirkliche Erklärung des Winkels

---

[1]) Man muſs allerdings zugeben, daſs bei dieser Definition der Winkelbegriff zurückgeführt ist auf die einfachen Elemente Punkt und Strahl, ohne daſs irgend etwas anderes sich einmischt. Ob aber damit etwas gewonnen ist, scheint in diesem Falle sehr zweifelhaft: um in das Wesen des betrachteten Gebildes einzudringen, gewissermaſsen die tote Figur zu beleben, gehört doch, daſs der Zusammenhang aufgedeckt wird, in dem die Elemente unter einander stehen. Auch ist der Einwurf nicht ungerechtfertigt, daſs bei dieser äuſserlichen Definition derselbe Fehler vorliegt, den Hoffmann der Euklidischen Definition macht, nämlich Starrheit.

[2]) Hierzu rechne ich auch die Euklidische Definition, die den Winkel als Neigung bezeichnet.

ausgeht, das Verhältnis von Winkel und Drehung in Berücksichtigung ziehen muss.

Eine ziemlich verbreitete Art, den Winkel zu definieren oder vielmehr die Definition des Winkels zu umgehen ist die, zu sagen: „Ein Winkel entsteht, wenn ....“. Dafs dies keine Definition des Winkelbegriffs ist, leuchtet ein, weshalb ich sie auch aus der ferneren Betrachtung ausschliesse.[1])

Während die Zitate am Schlusse des Kapitels folgen, muss ich doch an dieser Stelle, ehe ich an die kritische Besprechung der üblichen Definitionen herangehe, noch auf E. Müllers Definition eingehen, die er in seinen Elementen dargelegt hat.[2]) Zur Vervollständigung sollen noch aus der Vorrede eine Reihe von Definitionen des Winkels mit den kritischen Bemerkungen Müllers[3]) angeführt werden, wozu ich meinerseits bemerke, dass ich nicht überall mit Müller übereinstimme.

„Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien, wenn solche in einer Ebene zusammenlaufen, ohne in einer geraden Linie zu liegen.“

Was ist aber die Neigung zweier (gerader?) Linien? Wie kann eine Neigung Summe oder Differenz von andern sein? Zu welcher Art von Gröfsen gehört alsdann der Winkel, zu den Zahlen oder Raumgröfsen, zu den Linien, Flächen oder Räumen? Wo bleiben die gestreckten Winkel, die Null und die Vollwinkel?

„Winkel ist der Unterschied der Richtungen zweier Geraden, oder die Richtungsabweichung zweier sich schneidender Geraden.“

Was ist der Unterschied der Richtung? Wo ist die

---

[1]) Vergl. Hoffmann, Zu den geometrischen Grundbegriffen in H. Z. Bd. XVI, p. 342: „. . ., dafs viele Autoren und Lehrer die Definition umgehen, indem sie sagen, Ein Winkel entsteht, wenn . . ., damit ist aber nicht gesagt, was der Winkel ist.“

[2]) E. Müller, Elemente der Geometrie, streng systematisch. — Braunschweig 1869.

[3]) Müller bemerkt dazu: „Um niemand persönlich zu verletzen, werde ich die Verfasser der Lehrbücher, aus denen die angeführten Stellen entnommen sind, nicht weiter nennen.“

Richtung definiert? Und zu welcher Art von Größsen gehört denn der Winkel?

„Wenn sich zwei gerade Linien begegnen, so heifst die geringere oder bedeutendere Gröfse, um welche sie ihrer Lage nach von einander entfernt sind, Winkel.“

Wo ist Lage definiert? Wäre es, so würde nicht von Entfernung der Lage geredet sein.

„Winkel zweier an einem Punkte (dem Scheitelpunkte) zusammengestellten und einerseits von diesem Punkte begrenzten Linien (Winkelschenkel) ist die Gröfse derjenigen Drehung (Schwenkung), durch welche eine vom Scheitelpunkte begrenzte, andererseits aber unbegrenzte, gerade Linie in der Ebene des Winkels von der Lage des einen Winkelschenkels zur Lage des andern stets vorschreitend gelangen kann.“

Welch ungeheuerliche Definition! Eine Gerade einerseits durch einen Punkt begrenzt, andrerseits unbegrenzt! Was sind hier die Seiten einer Geraden? Der Winkel ist die Gröfse der Drehung, durch welche eine Gerade von der Lage des einen Schenkels zur Lage des andern vorschreitend gelangen kann?! Schon wieder Lage und zur Abwechslung einmal die Seite, doch Beides undefiniert.

„Als Gröfse der Drehung, durch welche eine Gerade aus einer anfänglichen Richtung in eine andre stetig übergeht, entsteht hierbei der Winkel.“

Als Gröfse der Drehung entsteht hierbei der Winkel!

„Die Lage zweier geraden, sich schneidenden Linien ist der Winkel derselben.“

Die Lage der Linien ist der Winkel!

„Zwei gerade Linien, welche von einem Punkte ausgehen, heifsen, wenn blofs die Lage der Linien zu einander betrachtet wird, ein Winkel.“

Also kurz, zwei Geraden, welche sich schneiden, heifsen ein Winkel!

„Zwei gerade Linien, welche sich begegnen (schneiden), bilden eine (?) gröfsere oder kleinere Öffnung, welche Winkel heifst.“

Der Winkel ist also eine Öffnung!

„Wo sich zwei gerade Linien schneiden, entsteht ein (?) Winkel.“

„On nomme angle, et quelquefois angle plan, chaque portion indéfinie de plan comprise entre deux droites, qui se coupent.“

„Portion indéfinie“ und doch eine bestimmbare, meſsbare endliche Gröſse!

„L'angle c'est l'écartement, plus ou moins considérable de deux droites, qui se coupent.“

Auch „La figure formée par deux droites, qui se coupent.“

Der Winkel eine Figur?

„On nomme angle la différence de deux directions.“

Das Beste liefert die Akademie in ihrem Dictionnaire; sie sagt:

L'angle, c'est l'ouverture de deux lignes, qui se rencontrent en un point, l'inclinaison, qu'elles ont l'une sur l'autre.“

„L'inclinaison,[1]) c'est l'obliquité d'une ligne ou d'une surface sur une autre.“

„L'obliquité, c'est l'inclinaison d'une ligne ou d'une surface sur une autre.“

„L'ouverture, c'est l'écartement; l'écartement c'est l'éloignement; l'éloignement c'est la distance.“

Soweit E. Müller. Und nun soll E. Müllers eigne Definition einer genaueren Betrachtung unterzogen werden. Müller sagt in seiner Vorrede nach den oben zitierten Beispielen: „Diese Beispiele werden genügen als Belege, daſs viele Mathematiker wenigstens über die Grundvorstellungen weder unter sich einig, noch selbst mit sich so recht im Klaren sind, wie auch zugleich, daſs von vielen wirklich Mathematik ohne genauere Erklärung der Begriffe getrieben wird... Begründet in den menschlichen Anschauungen sind diese Bestimmungen

---

[1]) Rougé et de Comberousse, Traité de Géométrie. „La consideration de deux droites *AB* et *AC* qui se rencontrent conduit à une idée nouvelle, qui est celle d'inclinaison mutuelle ou d'angle, et qui — comme l'idée de longueur — ne saurait être définie, c'est à dire remenée à une idée plus simple; ce qu'on définit, c'est l'égalité et l'addition des angles.“

des Raumes alle, doch zum klaren Bewufstsein müssen sie einem jeden erst gebracht werden.“[1])

„Und dies ist die erste Aufgabe ..., die Grundvorstellungen der Geometrie aus der reinen Anschauung zum klaren Bewufstsein genetisch zu entwickeln.“

Ehe Müller an die Beantwortung unsrer Frage selbst herangeht, benutzt er die Gelegenheit darauf aufmerksam zu machen, dafs Winkel schlechtweg schon eine Nachlässigkeit des sprachlichen Ausdrucks sei, und dafs alle Definitionen nur sich beschäftigen mit dem Linienwinkel, wie er ihn nennt, dem Geradenwinkel in der Ebene, wie er genau genommen genannt werden müfste: dem planimetrischen Winkel, wie ich ihn lieber nennen möchte. Müller fügt dann hinzu: „Die Definition des Winkels überhaupt, von welchem der Linienwinkel, Flächenwinkel, Körperwinkel, sphärische Winkel nur besondere Arten sind, hat kein Mathematiker bis jetzt zu geben auch nur versucht.“

Dieser Ansicht Müllers, dafs der planimetrische Winkel nur eine Art des allgemeinen Begriffs Winkel sei, kann ich nicht beipflichten, im Gegenteil, ich behaupte, dafs der planimetrische Winkel der allgemeine sei, von dem alle andern von ihm aufgeführten nur Abarten sind. Ich verweise in Bezug auf diese Frage auf meine weiter unten folgenden Erörterungen. Hier nur soviel. Mathematisch existiert nur der planimetrische Winkel, alle andern werden auf diesen zurückgeführt, mit seiner Hülfe angeschaut und zum Bewufstsein gebracht, ja ein Messen von Winkeln resp. die Feststellung der Gröfse irgend einer Art von Winkeln ist nur durch ihn möglich.

Zur Bestätigung des Gesagten brauche ich wohl nur daran zu erinnern, was man z. B. unter dem Winkel versteht, unter dem sich zwei Kurven schneiden, unter dem Winkel zweier Ebenen oder Flächen etc. Überall handelt es sich doch in diesen Fällen um den Winkel zweier Hülfsgeraden, darauf wird überall die Betrachtung zurückgeführt.

In der That, in der Mathematik giebt es keinen Winkel überhaupt, sondern wesentlich nur den planimetrischen.

---

[1]) Man vergleiche die Studie im ersten Bande.

Also würde bei einer philosophischen Betrachtung des Allgemeinbegriffs Winkel, die man ja als möglich hinstellen könnte, der Inhalt fehlen und also auch nach dieser Seite hin „der Winkel überhaupt" sich jeder Untersuchung, mithin auch einer Definition entziehen.

Ich möchte gleich diese Gelegenheit benutzen, um eine andre hierhergehörende Frage, deren Beantwortung mit der hier behandelten in engem Zusammenhange steht, in Betracht zu ziehen. Man hat nämlich die Frage aufgeworfen, ob die Tangente mit der Kurve, an die sie gezogen ist, einen Winkel bildet. Diese Frage ist entschieden zu verneinen, denn unter Winkel würde ja der Winkel zwischen der Tangente und der in dem betreffenden Kurvenpunkt gezognen Tangente d. h. mit sich selbst zu verstehen sein; man sieht also, dafs diese Frage nur ein negatives Resultat ergeben kann. Anders freilich würde sich das Problem gestalten, wenn gefragt würde: bildet die Tangente mit irgend einem Teil der Kurve, der nicht mit dem Berührungspunkt identisch ist, einen Winkel. Beantworten läfst sich diese Frage selbstverständlich nur, wenn man ein Kurvenelement dabei in Betracht zieht.

Nach dieser Abschweifung kehren wir zu der Definition E. Müllers von dem planimetrischen Winkel zurück. Es heifst bei ihm:[1] „Der Exponent des geometrischen Verhältnisses, in welchem ein durch Drehung, sei es durch die einfache Drehung eines Elementes eines ebenen Linienbüschels oder eines Flächenbüschels oder eines flachen Linienbüschels, sei es durch die zusammengesetzte Drehung der beiden Elemente eines Büschelraumes entstandenes Raumgebilde zu dem durch die totale Drehung derselben Elemente entstandnen steht, heifst Winkel, und zwar resp.

1. ein ebener Linienwinkel oder
2. ein Flächenwinkel oder
3. ein flacher Linienwinkel oder
4. ein Körperwinkel.

Der dem ebenen Linienwinkel ... entsprechende Teil der Ebene ... heifst Winkelebene ..."

---

[1]) Elemente, S. 26.

Diese Definition findet in einer Anmerkung,[1]) in der die oben erwähnten Betrachtungen der Vorrede noch erweitert werden, folgenden Zusatz:

„Als Exponent eines geometrischen Verhältnisses ist aber der Winkel eine Zahl, wie es der Sinus, Kosinus und die andern Winkelfunktionen ebenfalls sind ... Wie bei den Winkelfunktionen Zahl und Linie oftmals vertauscht und verwechselt werden, so noch öfter oder vielmehr stets wird der Winkel mit der Winkelebene verwechselt, oder vielmehr sagt man der gröfseren Kürze halber überall, wo kein Mifsverständnis entstehen kann, für Winkelebene blofs Winkel. Und wie die Gröfse der Winkelfunktionen, so ist auch die Gröfse der Winkel selbst unsrer Definition zufolge von der Länge der Schenkel unabhängig, weil die gröfsere oder kleinere Drehung von der Länge der Schenkel ganz unabhängig.“

Man wird der Definition E. Müllers nachrühmen müssen, dafs sie durchaus wissenschaftlich, zugleich völlig erschöpfend und vollkommen einwandfrei ist, aber nicht wird man ihr nachrühmen können, dafs sie kurz und bündig sei oder — wenn wir ihre Verwendbarkeit im Unterricht in Erwägung ziehen — dafs sie sich sonderlich für den Unterricht eigne. Aus dem letzteren Grunde, besonders wegen des für Viele unverständlichen Ausdrucks „Exponent des Verhältnisses“ kann ich auch diese Definition des Winkels nicht für angemessen erklären, wohlgemerkt aber nicht wegen des Inhaltes der Definition, sondern wegen ihrer Form.

Was nun die drei verbreitetsten Definitionen des Begriffes Winkel betrifft, so habe ich dazu Folgendes zu bemerken.

1. Der Winkel als Richtungsunterschied.

Bei der Besprechung dieser Definition können wir uns auf unsre Ausführungen im ersten Kapitel (§ 1) zurückbeziehen, ja wir werden hier zu einer wesentlichen Ergänzung und Erweiterung der dort angestellten Untersuchungen gelangen. Dort wurde nur der reine Begriff Richtung an und für sich zum Gegenstande der Untersuchung gemacht, hier werden wir

---

[1]) Elemente, S. 28.

durch seine Verwendung, durch die Vergleichung verschiedener Richtungen — sit venia verbo — zu neuen Gesichtspunkten gelangen, unter denen auch der reine Begriff selbst noch an Klarheit gewinnen wird. Wenn wir das dort Gesagte noch einmal kurz im wesentlichen zusammenfassen, so waren wir zu folgendem Resultate gekommen: Richtung ist die unmittelbare Relation zweier Punkte, die im Strahle zur Anschauung kommt.[1])

Wesentlich Neues tritt hinzu, wenn wir nun bestimmte Richtung, die in einem bestimmten Strahle zur Anschauung kommt, in Betracht ziehen. Fassen wir einen bestimmten Strahl als Träger einer bestimmten Richtung auf, so können wir jetzt, indem wir verschiedene Strahlen betrachten, indirekt auch von den verschiedenen Richtungen sprechen. So ist der Ausdruck zu erklären, dafs sich ein Punkt nach allen Richtungen bewegen könne. Bedenklich in hohem Mafse erscheint mir aber immer wieder bei fortgesetztem Nachdenken über diesen Gegenstand der Ausdruck, dafs Richtung veränderlich sei, dafs man Richtungen verändern könne, und ich glaube daher auch, dafs es gut sein wird, derartige Ausdrücke zu vermeiden. Von verschiedenen (bestimmten) Richtungen läfst sich wohl sprechen, man kann seine Richtung ändern, die Richtung wechseln, aber Richtung selbst — als Qualität, Modalität oder Relation — bleibt etwas Unveränderliches. Nur insofern, als bestimmte Richtung im bestimmten Strahle zur anschaulichen Vorstellung wird, kann man verschiedene Richtungen mit einander in Vergleichung bringen. Vielleicht liefse sich das Verhältnis so ausdrücken, dafs man sagte, Strahlen resp. Gerade sind verschieden in Bezug auf Richtung. Das würde jedenfalls genauer sein, als von verschiedenen Richtungen zu sprechen. Dennoch ist der allgemeine Sprachgebrauch gerade hier sehr dehnbar, selbst das verpönte Wort Richtungsunterschied hat gar mannigfaltige Analogieen im gewöhnlichen Leben, in denen ebenfalls von einer Quantität gar keine Rede ist, wenn wir z. B. vom Farbenunterschiede

[1]) So wie der Abstand die unmittelbare Relation zweier Punkte ist, die in der Strecke zur Anschauung kommt.

zweier Gegenstände sprechen. Selbstverständlich wird es Niemandem einfallen, hierbei an einen Quantitätsunterschied zu denken. Besser würde man ja, anstatt Unterschied, den Ausdruck Verschiedenheit wählen, aber streng genommen dürfte dadurch wenig gewonnen sein. Trotzdem in dem gewählten Beispiele von Quantität keine Rede ist, so spricht man aber doch von der Gröfse des Farbenunterschiedes, sagt, der Farbenunterschied ist hier gröfser als dort, mischt also eine quantitative Betrachtung in reine Qualitätsverhältnisse. Ja es ist nicht zu leugnen, dafs Qualitätsverschiedenheiten resp. Unterschiede mit einander verglichen werden können, dafs wir es also mit einer Art von Gröfsen zu thun haben. Es fragt sich nun, liegt hier dasselbe Verhältnis vor? Es würde zu einem grofsen Irrtum führen, wollte man die vorliegende Frage mit ihren Analogieen in andern Gebieten identifizieren. Wir müssen, um die wahre Erkenntnis zu erlangen, hier auf den Grund gehen, der hier teils in den reinen Begriffen selbst liegt, teils in dem Verhältnis der Einzelbeziehungen. Bleiben wir bei dem einmal gewählten Beispiele stehen. Auf den ersten Blick könnte es uns zu falscher Schlufsfolgerung verleiten, zu der Annahme, dafs Richtungsunterschied ein logisch richtiger Begriff und der möglichen Vergleichung halber ein Quantitätsbegriff besonderer Art sei — insofern nämlich, als überhaupt Vergleichung möglich.

Der wesentliche Unterschied, auf den es hier ankommt, ist der, dafs der Begriff der Richtung ein singulärer ist, der der Farbe nicht; es giebt verschiedene Arten von Farben, aber keine verschiedenen Arten von Richtungen. Es handelt sich also um eine ganz andere Sorte von Unterschied. Es liegt die Versuchung nahe, den Begriff der Lage in diese Betrachtungen hineinzuziehen, dadurch würde aber nichts gewonnen sein, im Gegenteil, dieser neue Begriff würde nur stören. Die Lösung des Problems liegt darin, dafs Qualitätsunterschiede quantitativ verglichen werden können, sobald es verschiedene Arten einer Qualität giebt, dafs dies aber nicht möglich ist, sobald die Qualität singulär ist.

Es ist also einleuchtend, dafs die Definition des Winkels als Richtungsunterschiedes hinfällig ist, ebenso wie alle mit

dieser verwandten, weil bei der bestehenden Singularität des Richtungsbegriffes der Winkel eine Gröfse ist, also nicht der Unterschied zweier Nichtgröfsen sein kann, die von einerlei Art sind. Hierin liegt ein logischer Widerspruch, der diese Definition, die auf den ersten Blick viel für sich zu haben scheint, unmöglich macht. Der Winkel ist eine Quantität, nach dieser Definition aber würden wir es mit einem qualitativen Unterschiede in der eben geschilderten eingeschränkten Beziehung zu thun haben, worin eine logische Unmöglichkeit liegt.

Es herrscht übrigens gerade hier eine seltene Einmütigkeit in der Auffassung resp. Abwehr der vorliegenden Definition.[1])

Im wesentlichen identisch mit der besprochenen Definition ist die Euklidische und die damit verwandten. Hoffmann äufsert sich zu ihr in seinem Aufsatze, Die Prinzipien des 1. Buches von Euklids Elementen, in H. Z. III, p. 121 wie folgt:

„Euklid erklärt den Winkel als Neigung zweier Linien zu einander und scheint sonach die Richtung der Schenkel nicht vom Treffpunkt (Scheitel, gemeins. Drehpunkt) aus, sondern nach dem Treffpunkte hin zu rechnen, indem er vorher die Geraden als parallel annimmt und jede sich um einen ihrer Punkte drehen läfst. Das Zusammentreffen ist dann Resultat (Folge) der Neigung, wobei das zu einander auf eine wenn auch nicht notwendig gleichzeitige Neigungsbewegung deutet. Es versteht sich von selbst, dafs dann auf der entgegengesetzten Seite ein Voneinanderweichen stattfindet.

Diese Definition leidet an der bekannten Euklidischen Starrheit. Sie erfafst das Winkelgebilde in einem bestimmten Momente der Erzeugung gewissermafsen als erstarrt, nicht im Flusse der Bewegung ... Genetisch ist dies Verfahren nicht. Denn das Kennzeichen der genetischen Methode ist, dafs sie die räumlichen Gebilde nicht wie ein

[1]) Auch Bürklen sagt l. c. p. 1: „Gegen die erste Definition (als Richtungsunterschied) wendet er mit Recht ein, dafs eine Richtung keine extensive Gröfse ist, und dafs zwei Richtungen daher keinen quantitativen Unterschied haben können.“

Gemälde in einem Momente des Gewordenseins, sondern im Flusse der Bewegung betrachtet und sehr richtig sagt B. Becker (Über die Methode des geometr. Unterrichts. Frankfurt a/M. 1845), daſs die Definition einer Raumgröſse „durch Angabe der eigentümlichen Erzeugungsweise das Wesen der Gröſse enthüllen muſs".“

Man sollte nach diesen Worten glauben, daſs Hoffmann keine andere Erklärung des Begriffes Winkel zulasse, als eine, die sich auf den Begriff der Drehung stützt. Und doch rühmt er an seiner Definition, daſs sie von der Drehung völlig unabhängig sei, und wählt eine Erklärung, die — wie ich schon weiter oben bemerkte — erst recht an dem Fehler Euklidischer Starrheit leidet. Gerade seine ganz äuſserliche Definition des Winkels als einer Figur geht doch von dem festen, starren Gebilde zweier Strahlen mit gemeinsamem Ausgangspunkte aus, ohne im geringsten von einer Beweglichkeit etwas anzudeuten.

Treffende Bemerkungen knüpft er an seine oben zitierten Ausführungen über Neigung und Abweichung, die in dem Begriffe Richtungsunterschied „verschmelzen". Aber daſs auch in dem letzteren Ausdrucke nicht das geringste Moment liegt, das auf Bewegung deutet, übersieht er.[1]) Was speziell noch das Wort „Neigung" betrifft, so möchte ich dagegen noch das bemerken, daſs es insofern ungünstig gewählt ist, als sein Wesen demjenigen des Winkels umgekehrt proportional ist: je geringer die Neigung, desto gröſser der Winkel; je gröſser die Neigung, desto kleiner der Winkel: derartige reciproke Verhältnisse aufzufassen, sollte man denen, die man zuerst mit dem Begriffe Winkel vertraut machen will, nicht zumuten.

Wenn ich soeben sagte, daſs Hoffmann übersähe, daſs in dem Begriffe Richtungsunterschied keine Bewegung liege,

[1]) Daſs Richtung kein Gröſsenbegriff, Richtungsunterschied daher ein qualitativer Unterschied sei, wird noch besonders bemerkt.

Man vergleiche auch Becker in H. Z. II, p. 97: „Als Richtungsunterschied darf er, auch davon abgesehen, daſs gerade Linien gar keine Richtung haben, schon deshalb nicht aufgefaſst werden, weil die Richtung und also auch der Richtungsunterschied gar keine Gröſse ist."

Ferner: Hoffmann, Studien über geometrische Grundbegriffe in H. Z. IV, p. 103.

so ist das nicht ganz genau. Er meint vielmehr, dafs dieser Begriff eine Bewegung involviere und stützt sich dabei auf folgende Äufserungen (Fresenius, Grundlagen etc. S. 34—35): „Desto einfacher ist die Definitionsweise: Winkel ist der Richtungsunterschied zweier Linien oder, was auf dasselbe hinauslaufend nur deutlicher die Bewegung involviert, zurückgelegter Drehungsweg etc.“ und (B. Becker: Über die Methode des geometrischen Unterrichts. Frankfurt a/M. 1845. S. 18): „Wenn man durch drehende Bewegung die Richtung einer Linie ändert, so nennt man die Gröfse dieser Änderung, den Richtungsunterschied, einen Winkel. Nur durch die drehende Bewegung, die erforderlich ist, um einen Schenkel in die Richtung des andern zu bringen, läfst sich der Winkel begreifen. An dieser Entstehung des Winkels mufs man festhalten, darauf alle Sätze über Winkel zurückführen; und wo man einen Winkel findet, mufs die Phantasie zu dem starrgewordnen Resultat die erzeugende Drehung hinzudenken.“

Mir will es scheinen, als wenn diese Zitate gerade gegen Hoffmanns Ansicht sprächen.

In einem gewissen Gegensatz zu seinen bisher besprochenen Ausführungen scheinen mir übrigens auch die Untersuchungen zu stehen, die er im IV. Bande der H. Z. p. 103 f. mitteilt. Dort wendet er der Drehung besondere Aufmerksamkeit zu, durch die der qualitative oder besser modale Richtungsunterschied in einen quantitativen oder Gröfsenunterschied umgewandelt werde.

„Durch diesen Prozefs der Drehung gelangt man also aus dem rein qualitativen Gebiet der Richtung in das quantitative. Denn die Richtungsänderung (Richtungsabweichung) wird nun zur Gröfse und läfst sich messen durch die Kreis- oder Drehungsbögen des betrachteten Punktes.“

Die weiteren Ausführungen, die sich hieran anschliefsen, sind zu ausführlich, um hier zitiert zu werden, ich mufs mit Nachdruck auf den betreffenden Artikel selbst verweisen.

Hiermit will ich die Besprechung dieser ersten Definitionsweise abschliefsen; ich werde weiter unten bei der Darlegung meiner eignen Ansichten und bei dem Versuche eine wissen-

schaftlich korrekte und im Schulunterrichte wohl verwendbare Erklärung des Winkelbegriffs zu geben, noch Gelegenheit finden, auf einige wichtige Punkte der Erörterung zurückzukommen. Auch die Zitate werden Veranlassung bieten, hierhergehörige Bemerkungen anzubringen.

2. Der Winkel als Ebenenstück.

Diese von Bertrand[1]) aufgestellte, von Baltzer in seinen Elementen acceptierte Definition hat ebenfalls zahlreiche Anhänger gefunden.

Ich bemerkte dazu in meinem erwähnten Artikel: „Nach dieser Definition würden alle Winkel unendlich grofs, also untereinander gleich sein.“

Diese Äufserung ist vielfach mifsverstanden worden,[2]) ja sie hat mir einige gerade nicht schmeichelhafte Beurteilungen zugezogen. So bemerkt Moroff in seinem Programm, das Winkelfeld, Hof 1890, p. 5: „Ferner, welche unglaubliche Behauptung läfst der Herr Herausgeber, welcher sonst mit Einwürfen sofort, ja schon im Voraus bei der Hand ist, unbeanstandet! Indem nämlich der Herr Verfasser im Verlauf seines Aufsatzes so eine Art ganz neue Erklärung für den Winkel giebt und selbstredend die sonstigen Auffassungen verwirft, kehrt er sich auch gegen die namentlich von Baltzer vertretene Richtung, wonach der Winkel ein ebenes Feld darstellt; man höre: „Es müfsten da alle Winkel als unendlich grofse einander gleich sein! Sehr merkwürdig; dem Herrn Verfasser müssen ja alle stetigen Ausdehnungen als gleich grofs gelten! Und hat er denn als Knabe niemals nach dem gröfseren Kuchenausschnitt gegriffen? Und hätte er es nicht, selbst wenn der Kuchenrand verdeckt d. h. die Begrenzung ungewifs gewesen wäre?“

Hierzu habe ich Folgendes zu bemerken. Warum ich nach dieser Äufserung alle stetigen Ausdehnungen als gleich

---

[1]) Bertrand, développement nouveau de la partie élémentaire des math. — Genève 1778.

[2]) Auch Herr Direktor Thaer äufserte brieflich seine Bedenken gegen diese Stelle, gab aber nach meinen Erläuterungen zu, dafs das Verhältnis $\infty : \infty$ über den Horizont der Schüler hinausgeht.

grofs ansehen mufs, ist mir nicht klar. Ich sehe hier keinen Zusammenhang. Was das geschmackvolle Beispiel vom Kuchen betrifft, so ist zu bemerken, dafs, wenn die Begrenzung verdeckt wäre, über die Gröfse der Stücke kein Urteil abgegeben werden könnte. Der Winkel ist ja aber ausdrücklich offen, nicht begrenzt. Beim Kuchen handelt es sich um Sektoren! Würde aber dem Kinde gesagt: beide Stücke sind unendlich grofs, oder in seiner Sprache, welches Stück Du auch nimmst, Du wirst es nie aufessen können, so würde es ihm natürlich einerlei sein, welches Stück es nimmt. Was hier in Betracht kommt, ist nicht die unendliche Gröfse an sich, sondern es handelt sich um $\infty : \infty$, um das Verhältnis des unendlich grofsen Ebenenausschnittes zu der unendlich grofsen Ebene selbst und darum, dafs dieses Verhältnis einen endlichen Wert hat. Derartige Betrachtungen dürften aber gewifs am Anfang des geometrischen Unterrichts nicht am Platze sein. Was mich diese Definition also verwerfen läfst, ist nicht die Furcht vor dem Unendlichen, obgleich es wohl methodisch richtig sein dürfte, möglichst selten mit diesem Begriffe im Anfangsunterrichte zu operieren,[1]) sondern die feste Überzeugung, dafs der Umstand, dafs das Verhältnis zwischen zwei unendlich grofsen Gröfsen einen endlichen, bestimmten Wert haben kann, kein geeignetes Problem für Quartaner ist.

Es kommt ferner hinzu, dafs das Operieren mit den unendlich grofsen Winkelfeldern zu neuen Schwierigkeiten führt. Was soll denn ein eben in die Geometrie eintretender Verstand mit dem Satze anfangen, dafs die Winkelsumme im

[1]) Im Gymnasium, IX. Jahrgang, Heft Nr. 8, findet sich folgende Besprechung der Moroffschen Abhandlung: „Behandelt die Lehre von den Winkeln unter Zugrundelegung der Definition, dafs dieselbe ein Feld von unendlicher Ausdehnung, aber durch Messung mit der Ebene vergleichbar sei. Ohne daraus Konsequenzen für das XI. Axiom zu ziehen, bringt die Abhandlung eine überraschend einfache Ableitung für die Winkelsumme des Dreiecks, die allerdings auf dem bedenklichen Prinzip beruht $\infty + a = \infty$. Wegen der durch die Definition des Winkels als unendlich grofses Feld benötigten Einführung des Unendlichen in die Elemente möchten wir nach wie vor der Auffassung des Winkels als Mafs für die Gröfse der Drehung, welche nötig ist, um aus einer Richtung in eine zweite zu kommen, den Vorzug geben.“

Dreieck einen Flachwinkel beträgt, wenn er diesen Flachwinkel mit der Halbebene zu identifizieren genötigt ist.

Dafs es sich hier um das Verhältnis von $\infty : \infty$ handelt, bemerkt auch Bürklen.[1]) Er sagt: „Dies (nämlich mein oben zitierter Satz) ist eine falsche Ansicht, denn $\infty : \infty$ ist bekanntlich nicht einfach gleich 1 und die Auffassung des Winkels als Ebenenstück führt aus diesem Grunde zu nichts Widersinnigem."

Ich glaube jetzt Klarheit geschaffen zu haben, was ich an der Definition auszusetzen habe und warum ich ihr entgegentrete.

Bürklen sagt übrigens l. c. p. 9: „Es dürfte mit dem Bisherigen[2]) nachgewiesen sein, dafs der Winkel weder an sich, noch hinsichtlich seiner Gröfse ohne weiteres auch nicht definiert werden darf als „das durch zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen abgegrenzte Ebenenstück".

Was ferner noch gegen die hier behandelte Definition einzuwenden ist, umfafst die folgenden beiden Punkte. Es wird dem Schüler nur schwer, vielfach gar nicht das Verständnis beizubringen sein für den Zusammenhang des unendlich grofsen Flächenstückes mit der anschaulichen endlichen Gröfse resp. seine Erkenntnis wird verwirrt, wenn er verschieden grofse Winkel ansieht und hört, dafs beide unendlich grofse Stücke der unendlich grofsen Ebene seien und insofern sich doch seiner Gröfsenvergleichung entziehen. Die anschauliche Darstellung der Veränderlichkeit eines Winkelgebildes dürfte am besten dazu geeignet sein, uns vor der Verwendung der hier besprochenen Definition im Schulunterricht zu bewahren.

Zweitens liegt bei der bisher üblichen Auffassung des Winkels — besonders, da meistens gar nicht besonders betont wird, ob wir es mit einem Raumgebilde oder Flächengebilde, speziell einem Ebenengebilde zu thun haben — nichts vor, das a priori für das letztere spräche.

---

[1]) Zur Lehre vom Winkel im Korrespondenzblatt für die Gelehrten- und Realschulen 1891. — Tübingen, Fues.

[2]) Es handelt sich dabei um die Bestimmung, was grofs am Winkel sei. Bürklen will Quantum und Quantität scharf geschieden haben.

Hoffmann[1]) äufsert sich zu dieser Definition folgendermafsen: „Diejenigen, welche Winkel als Ebenenausschnitt definieren, behaupten, der Winkel sei ein Teil der Ebene. Dazu ist zu entgegnen: Insofern Winkel (ähnlich wie Dreieck) Form an einem Ebenenteil (dem Geformten) ist und insofern jeder Raumteil, also auch ein Flächenraum geformt ist, die Form überhaupt nur an einem Raumgebilde zur Erscheinung kommen kann, insofern kann beim Winkel auch nicht ganz von der Ebene abstrahiert werden. Doch tritt diese Ebene (das Geformte) vor der Begrenzungsform in den Hintergrund (vergl. Holz- und Drahtdreieck). Nur die Gröfse des begrenzten Ebenenstückes oder der Flächeninhalt ist dabei gleichgültig. Winkel und Dreieck sind sonach nicht Flächen, sondern nur die einem Flächenstück die Form gebenden (dasselbe gestaltenden) Liniengebilde, der Winkel ein offenes, das Dreieck ein geschlossenes.“

3. Der Winkel als Drehungsgröfse.

Bei dieser Definition hatte ich mich in meinem mehrfach erwähnten Artikel gegen den Ausdruck „der Winkel ist die Gröfse der Drehung“ gewendet, indem ich anerkannte, dafs das Wesentliche für den Begriff Winkel, das Moment der Drehung, hier zur notwendigen Geltung gelange. Ich schlug dann folgende Definition für den Winkel vor:

„Gehen von einem Punkte zwei Strahlen aus, so ist der durch die beiden Strahlen gebildete Winkel das Mafs der stetigen Drehung, durch die der eine Strahl in die Lage des andern gebracht wird, ohne aus der durch die Strahlen bestimmten Ebene herauszugehen,[2]) oder kurz:

Der Winkel ist das Mafs der Drehung.“

[1]) H. Z. III, p. 123. — (Man vergl. auch H. Z. XVI, p. 340.)

[2]) M. Simon bemerkt hierzu in einem an mich gerichteten Briefe: „Ihr gesperrt gedruckter Satz ist unanfechtbar, leider ist er keine Definition des Winkels. Der Satz lehrt nur Drehungen mittelst der Winkel vergleichen und setzt somit den Winkel schon als bekannt voraus, gerade so, wie wenn Sie sagen, diese Strecke hat die Länge 3 m, Sie voraussetzen das Meter wäre bekannt. M. E. giebt es für den Winkel

Diese Definition ist von verschiedenen Seiten angenommen und findet sich in einigen neueren Lehrbüchern (vergl. oben die Fufsnote zu Moroffs Abhandlung); ich kann ferner bestätigen, dafs man im Unterrichte gut damit auskommt.

Selbstverständlich sind aber auch mehr oder weniger entschiedene Gegner dagegen aufgetreten. So finden sich in Hoffmanns Zeitschrift selbst wieder einige Artikel, auf die ich hier noch eingehen mufs.

Hoffmann selbst widmet meiner Abhandlung eine Besprechung im XX. Bande von H. Z. p. 581—83. Er sagt dort: „Wir glauben, dafs diese Definition schon deshalb nicht zu halten ist, sondern fallen mufs, weil sie einen Begriff der Mechanik (Drehung) hereinzieht und demgemäfs ihr Inhalt wesentlich mechanischer Natur ist. Denn Drehung ist eine Art von Bewegung. Zwar ist ja die Bewegung ein Element, das besonders in der neueren Geometrie eine Rolle spielt, aber doch nur als Unterstützung zu dem Zwecke herbeigezogen wird, um ... der Anschauung zu Hülfe zu kommen; aber dieses Hülfselement (Bewegung) ist nicht wesentlich für die Begriffsbestimmungen der Liniengebilde. Einen Winkel kann man auch begreifen, wenn man von der Bewegung (seiner Schenkel) absieht und ihn als fest geworden (erstarrt) betrachtet."

Dem gegenüber zitiere ich folgende Worte von Hoffmann selbst in H. Z. III, p. 121:

---

keine andere Definition als diese: Der Winkel ist die Grenze (der Grenzabschlufs) des Kreissektors bei über jedes Mafs wachsendem Radius, wobei per hypoth. angenommen wird, dafs der Winkel sich zur Ebene verhalte, wie sein Sektor zum Kreis. Da nach dem allgemeinen Prinzip gleiche Ursachen gleiche Wirkungen haben, zu gleichen Sektoren gleiche Winkel gehören und zu ungleichen Sektoren in derselben Weise ungleiche Winkel, so ist Ihre Definition als Satz bewiesen."

Von anderer geschätzter Seite werde ich darauf aufmerksam gemacht, dafs es sich empfehlen dürfte, die Definition so zu fassen:

„Gehen von einem Punkte zwei Strahlen aus, so wird das Mafs der stetigen Drehung, durch die der eine Strahl in die Lage des andern gebracht wird, ohne aus der durch die Strahlen bestimmten Ebene herauszugehen, als der durch die beiden Strahlen gebildete Winkel bezeichnet."

„Diese Definition (die Euklidische) leidet an der bekannten Euklidischen Starrheit. Sie erfaſst das Winkelgebilde in einem bestimmten Momente der Erzeugung gewissermaſsen als erstarrt, nicht im Flusse der Bewegung. Daher bleibt nun auch der Umfang des Begriffes unvollständig, denn ... Genetisch ist dies Verfahren nicht. Denn das Kennzeichen der genetischen Methode ist, daſs sie die räumlichen Gebilde nicht wie ein Gemälde in einem Momente des Gewordenseins, sondern im Flusse der Bewegung betrachtet und sehr richtig sagt B. Becker, daſs die Definition einer Raumgröſse „durch Angabe der eigentümlichen Erzeugungsweise das Wesen der Gröſse enthüllen muſs“.“

Man vergleiche übrigens auch meine Ausführungen zu Hoffmanns Arbeiten am Anfang dieses Kapitels.

Hoffmann fährt dann fort, p. 582:

„Wollte man aber auch die Drehung als das Wesentliche für den Winkelbegriff gelten lassen, so wäre doch nicht einzusehen, wie dadurch, daſs man Maſs der Drehung statt Gröſse der Drehung setzt, etwas gewonnen oder gebessert wäre.

Was ist denn ein Maſs? Eine bestimmte Gröſse, mit der man eine andere gleichartige miſst oder messen kann. Als Maſs kann aber jede Gröſse angenommen werden ... Dann aber ist Maſs nichts weiter als Gröſse. Maſs und Gröſse sind identisch, und ob man sagt Maſs der Drehung oder Gröſse der Drehung ist gleichgültig.“

Diese Ausführungen muſs ich entschieden bestreiten. Maſs und Gröſse sind durchaus nicht identisch. Nur das ist richtig, daſs das Maſs mit dem, was es miſst, gleichartig ist; darin sehe ich aber gerade den Vorzug meiner Definition; sie deckt das wahre Wesen des Winkelbegriffs auf; indem sie Winkel mit Drehung als gleichartig nachweist und auf den engen Zusammenhang zwischen Winkel und Drehung hinweist. Hoffmann hält an seiner Erklärung des Winkels als eines offenen, formgebenden Liniengebildes fest.

Auch im Bd. XXI der H. Z. kommt der Herausgeber noch einmal auf unser Thema zurück in einem Artikel „Neues zur Lehre vom Winkel“ p. 249—260, in dem er zuerst die Frage

erörtert, „welche Merkmale sind für die Bestimmung des Begriffs Winkel wesentlich und also notwendig und welche sind nebensächlich?“ Er geht auch hier von der figürlichen Erklärung aus und führt die Untersuchung zurück auf die wesentlichen Eigenschaften der Geraden: Lage (Stellung), Richtung, Gröſse. Von diesen sei für den Winkelbegriff wesentlich, also notwendig vor allem die Lage. Daraus folge, daſs — weil Parallele keinen Winkel bilden können — das Wesen, die Wurzel des Winkelgebildes in der Neigung der beiden Geraden liege. Neigung und Lage seien beide veränderlich. „Dagegen kann die Neigung einer Geraden (gegen eine andere) nur durch den Bewegungsprozeſs der Drehung sich ändern.“

„In dieser Möglichkeit der Neigungsänderung liegt aber die Quelle oder Wurzel der Gröſsenänderung des Winkelgebildes d. i. sein Wachsen und Abnehmen. Somit ist auch für diese Gröſsenänderung die Neigung das Wesentliche.“[1])

Ich meine, hier hätte man nach dem Vorhergehenden zu der Schluſsfolgerung gelangen müssen, daſs das Wesentliche des Winkels und seiner Änderung in der Drehung liege, da auf sie ja wieder nach den eben zitierten Worten die Neigung zurückgeht. Hätte Hoffmann diese sich mit unbezwinglicher Gewalt aufdrängende Konsequenz gezogen, so wäre er genau zu demselben Resultat gekommen, wie ich bei meinen Untersuchungen; aber er hat sich mit sehenden Augen von dieser Konsequenz weggewendet. Er schlieſst diese Betrachtungen mit den Worten:

„Wir haben jetzt alles, was am Winkelgebilde wesentlich ist, nämlich zwei Gerade und die Eigenschaft des Geneigtseins derselben, die aus ihrer Lage entspringt.“

Daſs hierbei der Begriff der Ebene vorausgesetzt wird, darauf möchte ich hier nur beiläufig hinweisen.

Der weitere Teil dieses Artikels rekapituliert des Ver-

---

[1]) Weiter unten p. 254 heiſst es: „Die Gröſsenänderung d. i. das Wachsen und Abnehmen des Winkels gehört aber ebenso wenig zum Wesen des Winkels, als . . .“

Mir scheint, als wenn diese beiden Äuſserungen sich diametral gegenüberständen.

fassers Ansichten über die Richtung. (Man vergleiche Kapitel I dieses Bandes.) Das Resultat ist, dafs die Definition des Winkels als Richtungsunterschiedes verworfen wird; aber auch meine Definition wird verworfen, da sie die Ursache (Drehung) statt der Wirkung oder des Resultates (Winkelgebilde) nehme. Wo bleibt aber dann der „Flufs der Bewegung"?

Da auch die dritte Eigenschaft der Geraden, die Länge, aufser Betracht bleibt, so sei also für das Wesen des Winkelgebildes einzig und allein die Neigung wesentlich. Es wird aber nachträglich zugegeben, dafs die hierauf gegründete Definition: „Der Winkel ist ein Liniengebilde, bestehend aus zwei zu einander geneigten Geraden, die bis zum Treffpunkt verlängert, also von diesem einseitig begrenzt sind," „in einem Punkte eine gewisse Leere zurücklasse."

Wäre das möglich, wenn die Definition wirklich alles Wesentliche enthielte?

Der zweite Teil des Artikels ist betitelt: „Zur Entstehung des Winkels aus der parallelen Lage zweier Geraden. Die Begriffe „Neigung" und „Abweichung" als Wechselbegriffe."

Hier finden sich recht wohl brauchbare Untersuchungen zur Verdeutlichung der früher angestellten Betrachtungen, für die eigentliche Definition des Winkels sind sie dagegen ohne Bedeutung.

Schliefslich bringt Bd. XXII der H. Z. noch zwei hierhergehörige Abhandlungen.

Die „Zur Definition des Winkels" betitelte von Gerlach, p. 1—9, geht davon aus, dafs „man sich etwas vorstellen und auch etwas denken könne."

Im ersteren Falle geht man von der reinen Figur einer gebrochenen Linie aus, die die Vorstellungen von einem sich öffnenden Gebilde, von einem Ebenenausschnitt oder Sektor, vom Richtungsunterschiede zweier Strahlen, von einer möglichen Drehung hervorruft. „Der Träger dieses Komplexes von Vorstellungen heifst Winkel."

Hierbei sei aber noch Wesentliches mit Unwesentlichem vermengt. Diesem „ursprünglichen" Winkel wird der „mathe-

matische“ gegenübergestellt, mit dem die Raumlehre operiert, „der also notwendig eine Gröfse oder Zahl ist.“

Die Untersuchung nimmt folgenden Gang.

„I. Der mathematische Winkel als unbenannte Zahl.“

Hier handelt es sich nur um Gröfsenvergleichung, um Relationen. Der ursprüngliche Winkel gilt als gegebne Vorstellung. Es ergiebt sich die Definition:

„Unter dem Winkel, den eine gebrochne Linie darstellt, versteht man die relative Gröfse des zugehörigen Sektors.“

„II. Der mathematische Winkel als Gröfse.“

Hier lautet die Definition:

„Die gebrochne Linie im Sinne eines Trägers, als eine dem Sektor proportionale Gröfse gedacht, heifst ein mathematischer Winkel.“

Auch hier gilt der ursprüngliche Winkel als gegebene Vorstellung.

Die beiden Definitionen werden als wesentlich identische bezeichnet, jedoch der zweiten Fassung der Vorzug gegeben, weil für den Schüler diese Vorstellung leichter sei. Der Winkel, so definiert, stelle sich dann als eine blofse Verhältniszahl dar; der ursprüngliche Winkel bleibe dabei ganz aus dem Spiele und eine Einigung in der Winkeldefinition sei damit erreicht.

„III. Der ursprüngliche Winkel.“

Während die wissenschaftliche Raumlehre den ursprünglichen Winkel als gegebene Vorstellung ruhig hinnimmt, aus dem Bereich ihrer Untersuchungen ausschliefst, darf die Schule ihn nicht als gegebne Vorstellung voraussetzen.

In ihm vereinigt sich, wie schon oben dargelegt, ein Komplex von Vorstellungen.

Aus diesem Komplex werden als unwesentlich vor allem ausgeschieden die Drehung, dann der Richtungsunterschied, dann der Begriff des Sektors, so dafs „schliefslich die ursprüngliche Erklärung des Winkels als eines sich öffnenden Gebildes die zutreffendste bleibt.“

Dafs wir mit dem Verfasser nicht übereinstimmen in dem Endresultat, braucht nicht besonders erwähnt zu werden: auch wird es überflüssig sein nochmals unsere Gründe gegen das

gewonnene Resultat vorzuführen. Jedoch schien uns die Abhandlung wichtig genug, um in ihren wesentlichen Grundzügen mitgeteilt zu werden, obwohl wir auf dem entgegengesetzten Standpunkte stehen und vor allem eine das Wesen des Winkels (und zwar des von Gerlach „als ursprünglicher Winkel“ bezeichneten Winkels) treffende Erklärung herbeizuführen für nötig halten.

Der andere erwähnte Artikel findet sich unter derselben Überschrift p. 13. Der Verfasser Schmitz spricht sich entschieden gegen die Definition des Winkels als Ebenenausschnittes aus, hält für Anfänger Richtungsunterschied am geeignetsten und will dies später dahin erweitern, dafs er sagt: „Das Mafs für den Richtungsunterschied heifst Winkel.“

Es erübrigt nun noch, nochmals auf meine früher aufgestellte Definition zurückzukommen und zu versuchen, sie durch einige weitere Betrachtungen sicherzustellen.

Der Haupteinwurf, der dagegen erhoben worden ist, ist der, dafs in die reine Geometrie ein fremdes Element, etwas Mechanisches, eingemengt werde, das geeignet sei, die Auffassung zu trüben. Dem gegenüber mufs ich vor allem bemerken, dafs ich mir eine fruchtbare Behandlungsweise, ja eine lebendige Anschauung geometrischer Gebilde ohne Bewegung überhaupt nicht vorstellen kann. Es kommt aber ferner in Betracht, dafs die psychische Verarbeitung oder Erarbeitung der geometrischen Grundbegriffe — abgesehen von den ersten Elementen, gewissermafsen dem Urstoff — ohne Bewegung nicht denkbar ist. Jede psychische Erfassung zweier von einander getrennten Gebilde resp. des Zusammenhangs zweier verschiednen Gebilde erfordert Bewegung: nicht mechanische der Gebilde, sondern psychische des betrachtenden Subjekts, die wir allerdings in die Gegenstände selbst verlegt uns denken können.

So resultierte aus der unmittelbaren Auffassung zweier Punkte in ihrer gegenseitigen Relation der Begriff der Strecke und des Strahles, indem das betrachtende Subjekt seine Aufmerksamkeit von dem einen auf das andere Element — hier die beiden Punkte — hinlenkt d. h. eine Bewegung, allerdings rein geistig vollzieht.

Mir will es nun scheinen, als wenn wir am tiefsten in das Wesen des Winkelbegriffs eindrängen, wenn wir hier ganz analog verfahren, wie bei der Betrachtung zweier diskreten Punkte.

Indem wir die beiden von einem Punkte ausgehenden Strahlen betrachten, bieten sich uns ebenso wie bei der Betrachtung der beiden Punkte zwei unmittelbare Relationen: Abstand und Richtung. Nur handelt es sich hier um wesentlich andre Prädikate wie dort. Dort Richtung von einem Punkte nach dem andern, die im Strahle zur Anschauung kommt, dem Bilde der geradlinigen Bewegung, hier Drehungsrichtung von dem einen Strahle nach dem andern, die in der Ebene zur Anschauung kommt: dort Abstand zweier Punkte, der durch die Strecke zur Anschauung kommt — die Strecke das Maſs für den Abstand oder für die geradlinige Bewegung —, hier der Drehungsabstand zweier Strahlen, der im Winkel zur Anschauung kommt — der Winkel das Maſs für den Drehungsabstand oder für die drehende Bewegung. Wie also die Strecke als das Bild des Abstandes, die anschauliche Darstellung oder Vorstellung des Abstandes bezeichnet werden kann, so ist der Winkel das Bild des Drehungsabstandes, die anschauliche Vorstellung desselben. Insofern gehört zum Winkel die von dem einen Strahl bei seiner kürzesten Bewegung nach dem andern erzeugte Fläche.

Dringen wir in die Betrachtung völlig ein, so handelt es sich in Wirklichkeit nicht um eine Bewegung der Strahlen, sondern um die psychische Bewegung beim Übergang von dem einen Strahl zum andern, bei der Erfassung der beiden der Betrachtung sich darbietenden Elemente, wie ich schon weiter oben bemerkte. Es ist aber zulässig und ändert an dem Wesen der Untersuchung nichts, wenn wir die im betrachtenden Subjekte vorgehende rein psychische Bewegung auf die Gegenstände selbst übertragen, sie so in eine mechanische verwandeln.

Damit ist die unbedingte Zusammengehörigkeit von Winkel und Drehungsabstand, zugleich aber auch die Ebenheit des Winkels — wenn ich mich so ausdrücken darf — sicher gestellt.

Denn ebenso wie es von einem Punkte zu einem andern

unendlich viele Wege giebt, unter denen der geradlinige, der in der Strecke zur Anschauung kommt, als der kürzeste den Begriff des Abstandes der beiden Punkte als der unmittelbaren Relation derselben veranschaulicht: so giebt es unendlich viele Wege, wie der eine Strahl in die Lage des andern gebracht werden kann, unter denen der ebenflächige, der im Winkel zur Anschauung kommt, als der kürzeste den Begriff des Drehungsabstandes der beiden Strahlen als der unmittelbaren Relation derselben veranschaulicht.

Strecke und Winkel sind völlig analoge geometrische Elemente: das eine der Ausdruck der geradlinigen Bewegung, das andere derjenige der drehenden.

Darin liegt das Wesen des Winkels und deshalb ist es psychologisch völlig korrekt ihn als das Mafs der Drehung zu definieren.

Was mir übrigens diese Erklärung noch besonders auszuzeichnen scheint, ist Folgendes. Wenden wir auch hier das Gesetz an, dafs die Erfassung zweier diskreten Gegenstände der Anschauung mit einem Minimum von psychischer Arbeit erledigt wird, so haben wir zunächst hierin wieder auch die Identität von Drehungsrichtung und Drehungsabstand, wie wir früher für Richtung und Abstand dies als den gemeinsamen Quell erkannten, das charakteristische Kennzeichen für ihren engen Zusammenhang. Dann aber ist hiermit sofort festgesetzt, dafs wir unter dem Winkel zweier Strahlen ganz unzweideutig den spitzen Winkel zu verstehen haben[1]) — dafs erst durch besondere Bestimmung eine andere Auffassung freigelassen resp. angeordnet wird.

Die Analogie zwischen Strecke und Winkel läfst sich aber noch weiter verfolgen. Wie dort, so haben wir auch hier beim Winkel zwei Drehungsrichtungen, während der Abstand, wiederum wie dort, nur einer ist. (Man vergleiche hierzu die Ausführungen Simon's über diesen Punkt (p. 11 seiner Pro-

---

[1]) Hierdurch wird auch das Bedenken gehoben, das Bürklen in seiner mehrerwähnten Abhandlung äufsert: „Wer die Winkelgröfse mit Hülfe der Drehung erklären wollte, der müfste zunächst nach einem Mittel suchen, um die zwei Drehungen, durch die ein Strahl in die Lage des andern gebracht werden kann, auseinander zu halten."

grammabhandlung),[1]) die sich direkt auf die hier angestellten Betrachtungen übertragen lassen.)

Nirgends stofsen wir bei dieser Vergleichung von Strecke und Winkel auf etwas, das uns die Wahl des Ausgangspunktes oder die Verfolgung des eingeschlagenen Weges als falsch erscheinen liefse, im Gegenteil Schritt für Schritt bestärken uns neue Analogieen in der Überzeugung, dafs wir in den angestellten Untersuchungen das wahre Wesen des Winkelbegriffes erfafst haben.

So könnte man auch noch erwähnen, dafs nach unsern Untersuchungen die Strecke sich zur unendlichen Geraden verhält, wie der Winkel zur unendlichen Ebenenmannigfaltigkeit,[2]) wobei allerdings darauf zu achten ist, dafs diese unendlichen Ebenen sämtlich nur in einer Ebene liegen. Dadurch dafs der Strahl bei der Drehung immer wieder seine Anfangslage passiert, haben wir hier eine natürliche Mafseinheit, die sogenannte volle Umdrehung, während uns diese bei der Strecke fehlt.[3])

Wie für zwei Punkte der Abstand existiert, auch ohne Strecke, durch diese aber in Anschauung tritt, so auch bei den Strahlen der Drehungsabstand, ohne im Winkel veranschaulicht zu werden. Hier zeigt sich nun bei der Behandlung dieser beiden analogen Gebilde eine völlig verschiedene Behandlung. Während wir die Strecken auch dem Auge sichtbar zeichnen, unterbleibt das Zeichnen des Winkels. Wir müfsten entsprechend dem Ziehen einer Strecke mittelst einer abfärbenden Spitze den Winkel darstellen durch Drehen eines abfärbenden Strahles. Was uns veranlafst davon abzusehen, ist wohl einmal der Umstand, dafs wir immer nur einen Teil des

---

[1]) Seite 41 dieses Bandes.

[2]) Nicht etwa Strecke : Gerade = Winkel : Ebene.

[3]) Schotten in H. Z. XX, p. 499: „Legen wir die in einer Ebene stetig verlaufende Drehung — statt dessen würden wir jetzt besser sagen, die eine Ebene konstituierende, erzeugende Drehung —, die ein Strahl um seinen Anfangspunkt als Drehpunkt ausführen mufs, um in seine Anfangslage zu gelangen, als Mafseinheit zu Grunde, so giebt ein gegebener beliebiger Winkel an, wieviel von dieser Drehung im betrachteten Falle ausgeführt werden soll, ist also das Mafs der Drehung."

Winkels so vor Augen führen können, dann aber auch der, dafs die Zeichenfläche einen Ersatz bietet.

Als gutes Veranschaulichungsmittel liefse sich vielleicht ein Fächer benutzen.

Hauff, Lehrbegriff der reinen Mathematik. — Frankfurt a/M. 1803.

p. 81: „Wenn in einer Ebene von einem und demselben Punkte zwei verschiedene Linien ausgehen, so nennt man die Abweichung der Richtungen dieser beiden Linien von einander einen ebenen Winkel.“[1])

„Gleiche Winkel decken einander.“

Schweins, System der Geometrie. — Göttingen 1808.

p. 6: „Die Neigung zweier sich durchschneidenden Geraden nennen wir Winkel, denen Gröfse ... von der Neigung selbst abhängt; denn Winkel und Neigung sind eins und dasselbe.“[2])

Bertrand, Élémens de Géométrie. — Paris 1812.

p. 4: „Deux droites AB, CD, qui se coupent sur un plan, en font quatre parts ASD, DSB, BSC, CSA, qui sont des angles: un angle est donc une partie du plan telle, qu'elle a pour limite deux droites qui se recontrent et se terminent à leur point de rencontre ... sa grandeur est la grandeur même de la portion de plan qui est limitée par ses jambes. Mais

---

[1]) Es ist bei dieser Definition hervorzuheben, dafs eine genaue Bezeichnungsweise früher nicht beliebt war. Unter Linien sind hier natürlich Gerade zu verstehen. Der Winkel wird als ein Gebilde der Ebene, nicht als konstituierendes Element der Ebene angesehen. Der Ausdruck „ebener Winkel“ läfst vermuten, dafs der Verfasser noch eine weitere Auffassung des Winkelbegriffs für möglich hält resp. voraussetzt, ohne näher darauf einzugehen.

[2]) Schweins steht also vollständig auf dem Euklidischen Standpunkte bei dieser Erklärung. Wir haben auseinandergesetzt, warum uns gerade der Ausdruck Neigung bedenklich erscheint, abgesehen von den Einwürfen, die im übrigen gegen diese oder eine verwandte Definition sprechen.

comme celles-ci limitent aussi bien la grande que la petite des deux parts qu'elles font du plan, l'on est convenu, pour éviter les méprises, que ce qui se dirait d'un angle, s'entendrait de la plus petite de ces deux parts, à moins que celui qui parle ne le rapportât expressément à la plus grande.“[1]).

Bézout, Cours des Mathématiques. — Paris 1812.

p. 6: „Deux lignes *AB*, *AC*, qui re rencontrent, peuvent former entre elles une ouverture plus ou moins grande.

Cette ouverture *BAC* est ce qu'on appelle un angle.

Pour se former une idée exacte d'un angle, il faut concevoir que la ligne droite *AB* était d'abord couchée sur *AC*, et qu'on l'a fait tournu sur le point *A* (comme une branche de compas sur sa charnière), pour l'amener dans la position *AB* qu'elle a actuellement. La quantité dont *AB* a tourné, est précisement ce qu'on appelle un angle.“[2])

---

[1]) Hier begegnen wir also zum erstenmal einer Definition, die von der Euklid'schen abweicht. Dafs sie viele Anhänger gefunden, ist schon im Texte erwähnt. Es verdient hier erwähnt zu werden, was Bürklen in seiner Abhandlung über den Winkel sagt: „Ordnet man ferner jene 45 Definitionen Schottens chronologisch, so zeigt sich, dafs die ältesten, wie das im vorigen Jahrhundert und am Anfange des laufenden allgemein bei der Behandlung der Elementargeometrie der Fall war, sich nach Euklid richten. Dann tritt unter dem Einflusse der projektivischen Geometrie und der neueren Mathematik überhaupt, in der Mehrzahl der Fälle zuerst die Richtung, später die Drehung in die Definition ein, indem man zuletzt auch hier das Werdende an die Stelle des Seienden zu setzen bestrebt war.“

„Zeigt sich also einerseits, dafs entsprechend der Entwicklung der Wissenschaft stets neue Auffassungen in einen Begriff hineingetragen werden können, so folgt auch, dafs es ein nutzloses Bestreben ist, eine Definition aufstellen zu wollen, die für alle Zeiten das Wesen des Begriffes erschöpft.“

Diesem Gedanken kann ich nicht völlig beipflichten, obwohl es nicht zu leugnen ist, dafs er eine grofse Wahrheit enthält, nämlich die, dafs in der Definition der Begriffe ein Flufs der Bewegung sich bemerkbar macht: dies aber, unserer Ansicht nach, nur so lange, bis es gelungen ist, das wahre Wesen des Begriffes in der Definition darzulegen.

[2]) Hier wird die Öffnung des Liniengebildes mit Winkel bezeichnet, also das, was von andern mit Neigung oder Abweichung

Daran schliefst sich die Betrachtung, dafs die Länge der Schenkel ohne Einflufs auf die Gröfse des Winkels ist und dann spricht der Verfasser direkt über den Zusammenhang zwischen Winkel und Kreis.

Crelle, Über Parallelen-Theorieen. — Berlin 1816.

p. 45: „Der zum Teil unbegrenzte Raum, welcher zwischen zwei Nichtparallelen, d. h. von einer bis zur andern liegt, heifst Winkel.“[1]).

In der Einleitung findet sich folgende Bemerkung:

p. 14: „Geht man näher in die Sache ein, so findet sich, dafs der Begriff des Winkelraums sogar deutlicher ist als der: der Winkel sei die Neigung zweier Linien gegen einander. Diese Definition beim Euklides schauet, wie mich dünkt, gleichsam rückwärts nach dem unbestimmten Unendlichen. Ich meines Teiles fühle, dafs ich von der Neigung zweier Linien keinen geometrisch klaren, nicht einmal deutlichen Begriff habe, weil ich nicht deutlich sehe, wie eine Neigung sich teilen läfst, also die Charakteristik der Gröfse an ihr nicht klar erkenne, die ihr allein ein Recht auf eine Stelle in der Geometrie giebt.“[2])

---

bezeichnet wird. Die Definition ist eine rein äufserliche, die nur das anschauliche Gebilde auffafst, ohne auf den Zusammenhang seiner Elemente zu achten. Doch finden wir schon hier in den sich anschliefsenden Sätzen die Hinweisung auf das wahre Wesen des Winkels, auf seinen Zusammenhang mit der drehenden Bewegung. Gerade diese zusätzlichen Bemerkungen hätten den Verfasser, wie viele andere, darauf hinlenken müssen, dafs eben der Winkel nicht wesentlich definiert werden kann, wenn man nicht auf seinen Zusammenhang mit der drehenden Bewegung Bezug nimmt.

[1]) Diese Begriffsbestimmung enthält nichts Bestimmtes. Was soll man sich unter dem zwischen zwei sich schneidenden Geraden befindlichen Raume vorstellen? Gemeint ist wohl das Richtige, aber es ist nicht zum präzisen Ausdruck gebracht.

[2]) Diesen Bemerkungen mufs man unbedingt zustimmen. Neigung teilbar, d. h. rein quantitativ, läfst sich nicht vorstellen; die Verknüpfung des Qualitativen (Neigung) mit dem Quantitativen (Gröfse des Winkels) ist auf diese Weise nicht möglich.

Kries, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Jena 1817.

p. 292: „Treffen zwei gerade Linien in einem Punkte zusammen, so entsteht ein ebener Winkel."

„Die Gröfse eines Winkels hängt nicht von der Länge der Schenkel, sondern von ihrer Lage gegen einander ab. Je weiter sie von einander zurückgehen, indefs sie in ihrem Scheitelpunkt unverändert zusammenhängen, desto gröfser wird der Winkel; und je mehr sie sich ihrer ganzen Länge nach einander nähern, desto kleiner wird er."[1])

Develey, Anfangsgründe der Geometrie. — Stuttgart 1818.

p. 14: „Wenn zwei gerade Linien AB, AC im Punkte A sich schneiden, so kann man diesen Punkt wie ein Gewinde ansehen, um welches die Linien AB, AC sich drehen können, um sich zu nähern oder sich von einander zu entfernen, ohne aus der Ebene, in welcher sie gezeichnet sind, herauszugehen. Bei dieser Bewegung vermindert sich die Öffnung, welche diese Linien bilden, wenn sie sich nähern, und vergröfsert sich, wenn sie sich von einander entfernen. Diese Öffnung heifst ein Winkel."[2])

„Die Gröfse eines Winkels hängt nicht von der Länge

---

[1]) Die Definition drückt sich um das punctum saliens der Untersuchung herum. Das Hineinziehen des Lagenbegriffes ist nicht geeignet, Klarheit in die Betrachtung zu bringen; doch geht unzweifelhaft hervor, dafs nach des Verfassers Ansicht Winkel und Drehung in engem Zusammenhange stehen, eine Erklärung des Wesens des Winkelbegriffes ohne Berücksichtigung der drehenden Bewegung undenkbar ist.

[2]) Es dürfte wohl kaum einer Entschuldigung bedürfen, dafs diese auf die Öffnung sich stützende Erklärung einer besonderen Erwähnung im Texte nicht gewürdigt ist. Sie ist im wesentlichen identisch mit der Euklidischen resp. der auf den Richtungsunterschied basierenden. Lobend anzuerkennen ist hier übrigens, dafs der Verfasser sich bemüht hat, Leben in die Definition zu bringen: aber doch ist seine Erklärung weit davon entfernt, genetisch zu sein. Befangen in den alten Anschauungen hat er es nicht über sich vermocht, die nötigen Konsequenzen zu ziehen und den Winkel in seiner unmittelbaren Beziehung zur drehenden Bewegung aufzufassen und demgemäfs zu erklären, wenn auch anerkannt werden mufs, dafs seine Betrachtungen die wesentlichen Elemente zu einer richtigen Definition enthalten.

seiner Schenkel ab, sondern nur von der Gröfse der Öffnung, welche die Schenkel bilden."

Blasche, Grundrifs der Elementar-Geometrie. — Reval 1819.

p. 1: „Einen Winkel *ABC* bilden zwei gerade Linien *AB*, *BC*, welche einen Punkt *B* gemein haben, aber zusammen nicht eine einzige gerade Linie ausmachen."[1])

Brewer, Lehrbuch der Geometrie. — Düsseldorf 1822.

p. 3: „Die Neigung von zwei geraden, sich durchschneidenden Linien, heifst ein Winkel."

Thibaut, Grundrifs der reinen Mathematik. — Göttingen 1822.

p. 177: „Wenn in einer ebenen Fläche, von demselben Punkte aus, zwei Richtungen genommen sind, so ist es allemal möglich, den Unterschied derselben durch kontinuierlichen Übergang von der ersten zur zweiten in ursprünglicher Anschauung aufzufassen, wozu eine, nicht weiter zurückführbare Raumbeschreibung oder Bewegung, welche die drehende genannt zu werden pflegt, erfordert wird. Ein Winkel besteht in dem durch drehende Bewegung aufgefafsten Unterschiede zweier Richtungen und seine Gröfse hängt von dem geringeren oder gröfseren Fortschreiten der zu seiner Erzeugung erforderlichen drehenden Bewegung ab."[2])

---

1) Erstens fafst der Verfasser den Winkel rein äufserlich als Figur auf; dann aber läfst er sich durch Euklids Definition verleiten, eine Ausnahme zu konstituieren, die in die Erklärung eine bedenkliche Lücke reifst, und so in die Untersuchung des Winkelbegriffes ein Moment einzuführen, das eine einheitliche Definition zur Unmöglichkeit macht.

2) Thibauts Grundrifs, dessen Bedeutung von einem so hervorragenden mathematischen Pädagogen, wie Siegmund Günther, rückhaltlos anerkannt wird, enthält, wie man sieht, in seiner Winkeldefinition schon alle wesentlichen Merkmale. Thibaut also ist wohl das Verdienst, das wahre Wesen des Winkels aufgedeckt zu haben, zuzuschreiben, das von den Späteren vorwiegend v. Münchow zuerkannt wird, dessen „Grundlehren der Trigonometrie" aber erst vier Jahre später erschienen, als Thibauts Grundrifs.

Paucker, Die ebene Geometrie. — Königsberg 1823.

p. 12: „Zwei gerade Linien werden entweder ... oder gehörig verlängert, nur in Einem Punkte zusammentreffen, in welchem sie einander durchschneiden:[1]) alsdann sagt man von ihnen, dafs sie gegen einander geneigt sind oder einen Winkel bilden."

„Durch zwei einander schneidende gerade Linien kann man sich immer eine Ebene gelegt denken; oder jeder von zwei geraden Linien gebildete Winkel liegt in einer Ebene."

Köberlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Sulzbach 1824.

p. 7: „Wenn zwei gerade Linien in einem Punkte zusammenstofsen, so heifst ihre Neigung gegeneinander ein ebener oder geradliniger Winkel."

Crelle, Lehrbuch der Elemente der Geometrie. — Berlin 1826.

p. 10: „Die gegenseitige Neigung zweier Linien, die sich schneiden, heifst Winkel; der zum Teil begrenzte Raum der Ebene Winkelraum, sodafs zu gleichen Winkeln gleiche Winkelräume gehören und umgekehrt."[2])

---

v. Forstner, Grundriss d. Elem. d. r. Math. — Berlin 1826.

p. 398: „Die Neigung zweier geraden Linien in einer Ebene gegen einander, bis sie in einem Punkte sich schneiden, heifst ein ebener geradliniger Flächenwinkel oder blofs Winkel; ... die unbegrenzte Fläche, welche sich zwischen beiden Schenkeln befindet, heifst der Winkelraum."[3])

---

[1]) Nach Hoffmann ist das Zusammentreffen von dem sich Durchschneiden wohl zu unterscheiden. Bei dem Winkel handelt es sich in der That nur um das Erstere.

[2]) Bei Crelle finden wir zum erstenmal die ausdrückliche Unterscheidung zwischen Winkel und Winkelraum. Wie wir dieses Verhältnis auffassen, geht aus unseren Betrachtungen wohl mit genügender Klarheit hervor.

[3]) Vergl. unsere Bemerkung zum vorhergehenden Zitat. v. Forstner hält im zweiten Teile seiner Erklärung nicht für nötig, die Ebenheit

„Die Gröſse eines Winkels hängt allein von der Neigung der Schenkel gegen einander ab und nie von der Länge derselben. Je gröſser die Neigung gegen einander ist, je kleiner ist der Winkel, welcher selbst wächst, wenn die Neigung geringer wird.“[1])

---

v. Münchow, Grundlehren der Trigonometrie. — Bonn 1826.

p. 12: „Um nun ..., wollen wir in Zukunft unter dem Winkel zweier geraden, an einem Punkt (dem Scheitelpunkt) zusammengestellten und einerseits von diesem Punkt begrenzten Linien (Winkelschenkel) die Gröſse derjenigen Drehung verstehen, durch welche eine vom Scheitelpunkt begrenzte, andrerseits aber unbegrenzte gerade Linie in der Ebene des Winkels von der Lage des einen Winkelschenkels zur Lage des andern stets vorschreitend gelangen kann.“

„Der Begriff dieser Erklärung ist erstens unmittelbar auf die gebräuchliche Art der Addition der Winkel anwendbar, indem die Gröſse der eben bestimmten Drehung zwischen den äuſsersten Schenkeln einer Winkelsumme zugleich die Gröſse der besagten Drehungen zwischen den Schenkeln der Summanden enthält; zweitens läſst sich aber nach diesem Begriff von einer jeden Winkelsumme wiederum als von einem Winkel sprechen; und so ist durch die aufgestellte Erklärung (die übrigens, da sie nichts weiter als eine ausführbare Bewegung voraussetzt, über ihre Möglichkeit keine besondere Ausweisung von nöten hat) den Forderungen, um deren Erledigung es hier zunächst zu thun war, Genüge geleistet.“[2])

---

der Fläche besonders zu betonen. — Während aber Crelle schon die Untersuchung des Winkelbegriffes in neue Bahnen lenkte, zeigt Forstners Darlegung noch alle Charakteristika des Euklid'schen starren Standpunktes.

[1]) Gerade dieser Umstand, dieses reciproke Verhältnis ist es, das, wie wir schon im Texte dargelegt haben, uns die vorliegende Definition ganz besonders verwerfen läſst.

[2]) Münchow scheint mit seiner Erklärung mehr Glück gehabt zu haben, wie andere. Er wird vorzugsweise als derjenige bezeichnet, der das Moment der drehenden Bewegung zur Erklärung des Winkelbegriffes

Förstemann, Lehrbuch der Geometrie. — Danzig 1827.

p. 6: „Winkel ein Teil einer unbegrenzten Ebene, der durch zwei halbbegrenzte Gerade, deren Grenzpunkte zusammenfallen, unvollständig begrenzt wird.“

„Entstehung des Winkels durch Drehung einer halbbegrenzten Geraden.“[1])

Pfleiderer, Scholien zu Euklids Elementen. — Stuttgart 1827.

p. 11—13 wird der Winkel behandelt und die Vermutung aufgestellt, dafs die in Euklids Elementen sich findende Erklärung verschlimmbessert worden sei (Viviani, Rob. Simson).[2])

Der Verfasser selbst kommt auf die Drehung zu sprechen:[3]) „Mithin hängt die Gröfse eines geradlinigen Winkels von der Gröfse des Auseinanderstehens seiner Schenkel; oder von der Drehung um seine Spitze ab, um welche ein Schenkel des Winkels von dem andern absteht.“

Savilius finde κλίσις (Neigung) nicht angemessen wegen des rechten und stumpfen Winkels.

Wolff, Lehrbuch der Geometrie. — Berlin 1830.

p. 5: „Zwei gerade Linien, die von demselben Punkte

---

herbeigezogen habe; ja bis in die neueste Zeit hinein wird Münchows Winkelerklärung als diejenige angesehen, die der Begriffserklärung neue Bahnen geschaffen hat. Man vergleiche unsere Bemerkung zu Thibauts Zitat und zu dem v. Swindens (p. 128 resp. 132).

[1]) Der Definition des Winkels als unbegrenzten Ebenenstückes schliefst sich also eine Erklärung an, die auf die drehende Bewegung Bezug nimmt. Wäre es da nicht natürlicher gewesen, beide Gedanken zu vereinigen und den erklärenden Zusatz über die Entstehung des Winkels mit der vorher abgegebenen Aussage zu einer genetischen Definition zu verknüpfen?

[2]) Euklid habe blofs eine Definition vom geradlinigen ebenen Winkel gegeben, die irgend ein Halbwisser allgemeiner zu fassen und in zwei Teile zu teilen unternommen habe.

[3]) Es ist erst gesagt, der Winkel beziehe sich auf die Lage seiner Schenkel, nicht auf deren Länge: auch nicht auf den zwischen den Schenkeln liegenden ebenen Raum, welcher „unbestimmt und nach Verschiedenheit der Länge der Schenkel verschieden“ sei.

ausgehen, heifsen, wenn blofs die Lage der Linien zu einander beachtet wird, ein Winkel."[1])

E. G. Fischer, Lehrb. d. eb. Geometrie. — Berlin 1833.

p. 7: „Wenn zwei gerade Linien aus einem Punkte auslaufen, ohne sich zu decken; so haben sie verschiedene Richtungen und der Unterschied ihrer Richtungen heifst ein Winkel. Je stärker nämlich ihre Richtungen von einander abweichen, desto gröfser ist der Winkel, den sie einschliefsen."[2])

Crelle, Zur Theorie der Ebene. — Journal 1834.

p. 32: „Die Neigung zweier geraden Linien im Raume, die sich treffen, ohne in einander zu fallen, heifst am Durchschnittspunkte Winkel."[3])

van Swinden, Elemente der Geometrie. — ed. Jacobi. Jena 1834.

p. 6: „Die gegenseitige Neigung zweier Linien, die in derselben Ebene liegen und in einem Punkte sich schneiden oder begegnen, wird ebener Winkel genannt."

Der Übersetzer weist in einer Anmerkung auf die treffliche Erklärung v. Münchow's hin (siehe Zitat).[4])

---

[1]) Hier ist die rein anschauliche Erklärung auf die Spitze getrieben: also „die Geraden heifsen ein Winkel". Was soll man zu einer solchen Definition sagen!

[2]) Das erste der Zitate, in dem der verpönte „Richtungsunterschied" vorkommt. Es ist übrigens nicht zu übersehen, dafs der Autor den Nullwinkel ausschliefst — d. h. also den Fall, dafs der „Richtungsunterschied" Null ist — und den Vollwinkel, den Fall, wo — ja wie soll man da sagen: der „Richtungsunterschied" wieder Null ist — man sieht, hierbei kommt man mit dieser Definition völlig in die Brüche.

[3]) Es ist mir nicht recht klar, warum Crelle die Worte hinzufügt „am Durchschnittspunkte"; vielleicht soll es andeuten, dafs die Geraden sich wirklich schneiden müssen d. h. bis zum Durchnittspunkte verlängert werden müssen: aber es heifst doch schon vorher „die sich treffen". Wie gesagt, mir ist dieser Zusatz unverständlich.

[4]) Das v. Münchowsche Buch scheint demnach bekannter gewesen zu sein, als das ältere Thibautsche, sonst wäre diesem wohl das Verdienst zuerkannt worden. Allerdings ist zuzugeben, dafs v. Münchows Ausdrucksweise prägnanter ist und seine Erklärung sprachlich vor derjenigen Thibauts den Vorzug verdient.

Ulrich, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Göttingen 1836.

p. 410: „Von einem in der Ebene angenommenen Punkte aus giebt es unendlich viel Richtungen, denn es können von ihm aus unendlich viel gerade Linien in der Ebene gezogen werden. Um aus einer dieser Richtungen in eine andere zu geraten, ist an jenem Punkte eine eigentümliche Bewegung, Drehung, erforderlich. Die Gröſse der Drehung, wodurch der Übergang aus der einen in die andere Richtung, ohne daſs man dabei in andere als in der Ebene befindliche Zwischenrichtungen geraten wäre, geschieht, bestimmt den Winkel, oder die gegenseitige Neigung zweier geraden Linien.“[1])

Arneth, System der Geometrie. — Stuttgart 1840.

Man vergl. die im zweiten Kapitel zitierten beiden ersten Absätze, worauf es heiſst:

„Von der geneigten Lage. Haben AB und CD verschiedene Richtung, so findet ein Unterschied ihrer Richtungen statt, diesen Unterschied nennt man Winkel.“

„Man kann die Richtung ED allmählich in die EB übergehen lassen, wo alsdann beide Geraden zusammenfallen. In diesem Falle wird der Unterschied der Richtungen, also der Winkel immer kleiner, und zuletzt verschwindet derselbe.“

„Die Gröſse des Winkels ist unabhängig von der Gröſse der Linien, welche ihn bilden, und ändert sich nur mit den Richtungen beider Geraden.“

Euklid, Elemente ed. Dippe. — Halle 1840.

p. 1: „Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien gegeneinander, die in einer Ebene zusammentreffen, ohne in gerader Linie zu liegen.“

---

[1]) Ulrichs Lehrbuch ist durch gute Begriffserklärungen ausgezeichnet, es erinnert in Vielem an Thibauts Grundriſs. Vielleicht ist es nicht unbeeinfluſst von jenem.

Das Charakteristische zur Winkelerklärung ist verwendet, insofern ist gegen die Definition nichts einzuwenden, dagegen hat die Gröſse der Drehung für uns die Bedenken, die wir im Texte entwickelt haben.

Wunder, Die Elemente der ebenen Geometrie. — Leipzig 1840.

p. 14: „Zwei Strahlen, welche beide von demselben Ausgangspunkte ausgehen, haben entweder einerlei oder verschiedene Richtung; im ersten Falle bilden sie eigentlich beide nur einen Strahl, fallen zusammen und können nur in Gedanken von einander unterschieden werden. Haben aber zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen verschiedene Richtung, so bilden sie einen Winkel; ein Winkel ist der Unterschied der Richtung zweier von einem Punkte auslaufenden geraden Linien oder Strahlen.“[1])

„Denkt man zwei Strahlen mit den Anfangspunkten und übrigens ganz aufeinander gelegt, so hat man noch keinen Winkel; läfst man aber nun, während der eine Strahl in seiner Lage bleibt, den andern um den gemeinschaftlichen Anfangspunkt immer nach derselben Seite hin sich schwenken, also seine Richtung ändern, bis er in eine bestimmte Lage kommt, so ist ein Winkel entstanden.“[2])

Beck, Die ebene Geometrie nach Legendre. — Bern 1842.

p. 4: „Ein Winkel wird gebildet, wenn zwei gerade Linien in einem Punkte zusammentreffen, ohne eine einzige gerade Linie zu bilden.“

„Die Gröfse des Winkels hängt nur von der gegenseitigen Neigung der Schenkel, aber nicht von ihrer Länge ab.“

Francoeur, Vollständiger Lehrkurs der reinen Mathematik. Ed. Külp. — Bern 1843.

---

1) Die einleitende Betrachtung enthält viel Gutes, besonders hat uns gefallen der Hinweis auf die nur in Gedanken mögliche Unterscheidung der zusammenfallenden Strahlen. Die eigentliche Erklärung leidet an dem Fehler der allzu äufserlichen Auffassung des Gebildes. Wenn es hiefse, der Unterschied der Richtungen komme im Winkel zur Anschauung, so könnte man sich damit vielleicht einverstanden erklären, obwohl wir auch dann keine genetische Definition hätten.

2) Dieser Zusatz hätte mit der Erklärung zur genetischen Definition verwoben werden müssen; jedenfalls dient er aber dazu, die vorhergehende Definition zu gröfserer Klarheit zu bringen. Eigentümlich ist der Ausdruck „schwenken“ statt „drehen“. Wenn wir nicht irren, braucht ihn kein anderer Autor.

p. 5: „Zwei gerade Linien CB, CA, welche nur einen einzigen Punkt gemein haben, können keinen Raum abgrenzen. Der unbestimmte zwischen diesen geraden Linien von beliebiger Länge eingeschlossene Raum wird Winkel genannt.“[1])

„Die Erklärung vom Winkel hat wegen der Einfachheit des Begriffs gleichfalls seine grofsen Schwierigkeiten. Wir sagen daher auch hier kurz: der Winkel ist uns durch Anschauung gegeben.“[2])

Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie. — Jena 1844.

p. 26: „Winkel zweier in einer Ebene von demselben Endpunkte ausgehender halbbegrenzter Geraden ist das Mafs der fortschreitenden Drehung, durch welche sich die eine jener Geraden von der andern entfernt hat.“[3])

---

[1]) Der Verfasser hält einen Hinweis auf die Ebene für unnötig; darin liegt, wie mir scheint, der Gedanke an den kleinsten Raum ausgedrückt, der zwischen den Geraden möglich ist, die unausgesprochene Annahme eines Abstandes besonderer Art.

[2]) Das wäre jedenfalls das Bequemste; aber es scheint uns doch nicht zulässig, die Schwierigkeit auf diese Weise zu umgehen. Der mathematische Winkel ist denn doch etwas anderes als Winkel im gewöhnlichen Leben.

[3]) Die Erklärung ist vollständig die unsere, nur dafs wir an Stelle der fortschreitenden Drehung — ein Ausdruck, der mifsverstanden werden kann — den Ausdruck „stetige Drehung“ gebraucht haben. Bei der Abfassung meines Artikels (in H. Z. XX, p. 481—501) war mir Bretschneiders Lehrgebäude noch nicht bekannt. Merkwürdig bleibt immerhin, dafs eine Reihe vorzüglicher Lehrbücher — wozu auch das hier vorliegende gehört (Thibaut, Ulrich, Kunze) — so vollständig haben verdrängt werden können durch zum Teil recht zweifelhafte Produkte neueren Datums. Aber andererseits ist es auch wieder natürlich, dafs in dem sich überstürzenden Strome von Lehrbüchern die alten losgerissen und weggeschwemmt wurden — gute und schlechte unterschiedslos. Den Haupteinflufs haben natürlich die Veränderungen in den Lehrplänen gehabt: hier ist die Thatsache merkwürdig und auffallend, dafs bei der Erweiterung des mathematischen Unterrichts die Lehrbücher sich verkürzten; doch mag auch der Zeitgeist mitsprechen, der eine behagliche und ach so wohlthuende Vertiefung in den Gegenstand beim Lernenden kaum noch zuläfst. Hastig und nach Art von Kraftfutter wird die Wissenschaft eingeflöfst; ob zum Segen der Schüler?

Gehen von einem Punkte A einer Ebene zwei halbbegrenzte Gerade AB und AC aus, von denen AB als festliegend, AC als um A beweglich gedacht wird, so kann AC durch fortschreitende Drehung in immer andere Lagen gegen AB gebracht werden. Das Mafs der fortschreitenden Drehung nun, welche erforderlich ist, um AC aus derjenigen Lage, in welcher sie die feste Gerade AB deckt, in irgend eine andere bestimmte Lage zu bringen, heifst der zu dieser Lage der beiden Geraden gehörige Winkel, oder auch schlechthin der Winkel beider Geraden."

„Der zwischen den Schenkeln liegende Teil der unbegrenzten Ebene heifst das Winkelblatt."

„Da übrigens der ebene Winkel nichts als die Quantität der erfolgten Drehung ist, mithin sich als eine benannte Zahl von einer eigentümlichen Gattung oder Einheit darstellt: so ist klar, dafs gleichvielte Teile oder Gleichvielfache eines und desselben Winkels untereinander stets gleich sein müssen. Es kann daher auch niemals von einer Kongruenz, sondern nur von einer Gleichheit zweier Winkel die Rede sein."[1])

---

[1]) Diese Bemerkungen sind sehr treffend. Ich will übrigens diese Gelegenheit benutzen, um noch einmal auf Bürklens Arbeit zurückzukommen. Er sagt l. c. p. 2: Überhaupt leiden alle von Schotten (H. Z. XX) angeführten Definitionen offenbar an dem Fehler, dafs sie nur die Gröfse und in dieser nur die Quantität, nicht das Quantum des Winkels zu definieren suchen. Die Gröfse ist aber nur eine Seite des Objektes, durchaus nicht die alleinige."

p. 5: „. . . beim Winkel ist bei gleicher Gröfse keine verschiedene Gestalt möglich und es kann Kongruenz von Ahnlichkeit nicht mehr unterschieden werden, es ist bei gleicher Gestalt immer auch gleiche Gröfse vorhanden. — Hieraus ist auch ersichtlich, warum bei keinem geometrischen Gebilde aufser beim Winkel die Gröfse als Einteilungsprinzip verwendet wird." (Hierzu ist zu bemerken: Hätten wir bei der Strecke eine natürliche Mafseinheit, wie beim Winkel die einmalige Drehung, so würden wir auch dort dieses Einteilungsprinzip verwenden.)

Wegen der einheitlichen Auffassung und Untersuchung dürfte aber auch der Winkel nicht mit seiner Gröfse identifiziert werden. „Wir haben aber zuerst zu fragen, was ist grofs am Winkel, dann erst wie grofs. Die erste Frage wird gewöhnlich nicht nach Gebühr gewürdigt und doch ist sie die wichtigere."

Legendre, Elemente der Geometrie. Ed. Crelle. — Berlin 1844.

p. 2: „Wenn sich zwei gerade Linien begegnen, so heifst die geringere oder bedeutendere Gröfse, um welche sie ihrer Lage nach voneinander entfernt sind, Winkel.“[1])

„Die Winkel sind, wie alle Gröfsen, der Vermehrung, Verminderung, Vervielfältigung und Teilung fähig.“

J. H. T. Müller, Lehrbuch der Mathematik. — Halle 1844.

p. 9: „Denkt man sich von irgend einem Punkte aus im Raume zwei Strahlen gezogen und in der dadurch bestimmten Ebene den einen derselben um jenen Punkt immer nach einerlei Richtung so lange gedreht, bis er mit dem andern zusammenfällt: so heifst die Gröfse dieser Drehung der von jenen Strahlen gebildete oder eingeschlossene Winkel.“

Recht, Die Elemente der Geometrie. — München 1844.

p. 15: „Die Neigung zweier sich schneidenden geraden Linien nennt man Winkel.“

„Wenn man eine Gerade in einem Punkte befestigt denkt, so kann man sie, beständig in einer Ebene bleibend, beliebig um einen Punkt drehen. Dasjenige nun, wodurch sich die verschiedenen Stellungen dieser Geraden voneinander unterscheiden, nennt man ihre Neigungen oder ihre Winkel.“[2])

Mahistre, Lehrbuch der vergl. Geometrie. Ed. Lorey. — Weimar 1845.

p. 15: „Ein ebener Winkel oder blofs Winkel, ist die

---

[1]) Eine höchst eigentümliche Erklärung; sollte es vielleicht an der Übersetzung liegen?

[2]) Das Vorurteil gestattet noch nicht, die Euklid'sche Definition beiseite zu lassen; doch drängt die bessere Erkenntnis dazu, im erläuternden Zusatz das wahre Wesen des Winkelbegriffes klar zu legen: aber es gelingt noch nicht völlig. Der letzte Satz bringt noch den Begriff der Stellung in die Erörterung, wodurch sie gerade nicht an Klarheit gewinnt.

gröfsere oder kleinere Öffnung, welche zwischen zwei Geraden enthalten ist, welche in demselben Punkt endigen."[1])

Auch die Drehung wird erwähnt.

Erb, Die Probleme der geraden Linie etc. — Heidelberg 1846.

p. 35: „Winkel ist also eine aus zwei einseits begrenzten geraden Linien in ihren Grenzen derart zusammengesetzte Linie, dafs keine derselben mit der anderen oder ihrer Verlängerung zusammenfällt, beide verlängert aufser dem Vereinigungspunkt keinen anderen Punkt mehr gemeinschaftlich haben."[2])

Salomon, Reine Elementargeometrie. — Wien 1847.

p. 12: „Die Abweichung zweier zusammenstofsenden Linien von dem gemeinschaftlichen Puukte oder die Neigung dieser zwei Linien zu dem gemeinschaftlichen Punkte heifst Winkel; ... Man könnte den Winkel auch als den Unterschied der Richtungen zweier Strahlen betrachten."

Steffenhagen, Kompendium der Planimetrie. — Parchim 1847.

p. 23: „Die Neigung zweier ungleich gerichteten geraden Linien in derselben Ebene heifst Winkel."

„Der Raum zwischen den beiden Schenkeln heifst Schenkelweite."

Tellkampf, Vorschule der Mathematik. — Berlin 1847.

p. 240: „Eine um ihren unbeweglichen Anfangspunkt in

---

[1]) Diese Erklärung ist sehr unbestimmt; denn die gröfsere oder kleinere Öffnung hängt doch von der Entfernung vom gemeinsamen Punkte ab, wobei die nahezu völlige oder vollständige Gleichheit der Schenkel stillschweigend vorausgesetzt wird. Derselbe Winkel kann uns sehr verschieden offen erscheinen.

[2]) Was soll man zu einer solchen Erklärung eigentlich sagen? Winkel eine aus zwei Linien zusammengesetzte Linie!!

einer Ebene gedrehte Gerade wird während ihrer Umdrehung allmählich sämtliche Richtungen durchlaufen, welche in der Ebene um den Punkt möglich sind. Als Gröfse der Drehung, durch welche sie aus einer anfänglichen Richtung in eine andere stetig übergeht, entsteht hierbei der Winkel.“

Knorr, Elemente der Geometrie. — Kiew 1849.

p. 18: „Ein ebener geradliniger Winkel ist ein Teil einer unbegrenzten Ebene, welcher zwischen zwei einseitig unbegrenzten geraden Linien liegt, die einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt haben.“

„Ebene geradlinige Winkel sind untereinander vollkommen gleichartig.“[1])

„Wenn der Winkel Gegenstand geometrischer Betrachtungen sein soll, so mufs er auch als geometrische Gröfse definiert werden; eine geometrische Gröfse ist aber entweder Körper oder Fläche oder Linie; der ebene Winkel ist nun weder Körper noch Linie, also kann er nur zu den Flächen gehören.“[2])

Ebensperger, Gemeinfafsliche Geometrie. — Nürnberg 1850.

---

[1]) Ein unverständlicher Zusatz.

[2]) Man vergleiche zu dieser Bemerkung die im Texte im Auszuge wiedergegebene Abhandlung von Gerlach (H. Z. XXII, p. 1—13). Gegen die Voraussetzung, wie Schlufsfolgerung hier läfst sich nichts einwenden. Aber es ist doch zu bedenken, dafs wir in der Geometrie eine ganze Gruppe von Gröfsen haben, die zwar reine Zahlengröfsen sind, aber eine bestimmte geometrische Deutung haben: ich meine die Funktionen des Winkels. Ganz ähnlich nun ist der Winkel eine besondere Art Gröfse, wie schon daraus hervorgeht, dafs er uns geometrisch (durch Anschauung) gegeben sein kann, aber auch durch Zahlen. Wir können mit ihm geometrisch (als Figur) operieren, aber auch rein rechnerisch — z. B. Konstruktion oder Berechnung des Nebenwinkels. Diese besondere Eigentümlichkeit weist ihm eine Stellung an aufserhalb der geometrischen Elemente, wie aufserhalb der Zahlenreihe, und doch mit beiden im engsten Zusammenhange. Diese doppelte Wesenheit wird durch unsere Definition charakterisiert.

Man vergleiche hierzu einen Aufsatz in Grunerts Archiv. Bd. 54, p. 405: Worpitzky, Über die Grundbegriffe der Geometrie.

p. 15: „Wenn zwei gerade Linien in einen Punkt zusammentreffen, so bilden sie einen Winkel. Ein Winkel ist also die Gröfse der Neigung zweier geraden Linien in einen Punkt oder der Unterschied in der Richtung zweier geraden Linien, die von einem Punkte ausgehen.“

Lübsen, Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Hamburg 1850.

p. 23: „Wenn von einem Punkte zwei gerade Linien nach verschiedenen Richtungen ausgehen, so sagt man: sie seien gegeneinander geneigt und bilden einen Winkel miteinander, und man versteht daher unter Winkel immer die Neigung zweier geraden Linien gegeneinander.“

„Einen Winkel kann man sich durch Bewegung entstanden denken. Die Schenkel haben anfangs aufeinander gelegen, dreht sich der eine, so entsteht sogleich ein Winkel, der mit fortgesetzter Drehung immer gröfser wird.“

Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie. — Jena 1851.

p. 14 im § 22 wird von sich schneidenden Geraden gesprochen.

§ 23: „Der flüchtigste Blick auf das eben besprochene Gebilde zeigt sogleich, dafs es ein neues ist. Wir nennen es Winkel und definieren demnach: Winkel ist dasjenige Gebilde, welches durch zwei sich schneidende Gerade entsteht.“

§ 26: „Wenn sich zwei Gerade AB, CD in einem Punkte O schneiden, so gehen von diesem Punkte O vier Gerade OA, OB, OC, OD aus. Je zwei von ihnen stellen das Gebilde dar, welches wir jetzt bestimmten Winkel nennen wollen. Wir können also die Definition des § 23 bestimmter so fassen: Winkel ist dasjenige Gebilde, welches durch zwei von einem Punkte ausgehende Gerade dargestellt wird.“[1])

[1]) Bartholomäi giebt also in diesen beiden Paragraphen die rein äufserliche Erklärung des Winkels als einer Figur, ohne auf den Zusammenhang der konstituierenden Elemente, auf das Wesen des Winkels irgendwie einzugehen.

§ 27: „Wollen wir die Abhängigkeit der Elemente eines Winkels ABC kennen lernen, so müssen wir aus der einen Geraden BC in die andere AB übergehen. Dieser Übergang geschieht zunächst dadurch, dafs sich der eine Schenkel BC um den Scheitelpunkt B dreht, bis er in die Lage des andern BA kommt. Diese Drehung darf nicht willkürlich sein. Deshalb lassen wir den drehenden Schenkel BC auf einer Geraden AC, welche durch zwei beliebige Punkte A, C der Schenkel geht, hingleiten. (Entstehung der Ebene.)[1])

§ 32: „1. Die beiden Schenkel des Winkels sind verschiedene Richtungen. Der Unterschied derselben wächst, wenn die Drehung fortgesetzt wird. Sobald wir also blofs auf die Richtung der Schenkel Rücksicht nehmen, kann blofs an einen Unterschied der Richtungen gedacht werden. Der Winkel stellt also diesen dar. Daher können wir die Definition aufstellen: Winkel ist der Unterschied in der Richtung zweier Geraden, die von einem Punkte ausgehen."[2])

2. Der Winkel erscheint als eine Ebene, welche von zwei Geraden, welche vom Scheitelpunkt ausgehen, begrenzt und einerseits unbegrenzt, und mit Geraden, welche vom Scheitelpunkt ausgehen, erfüllt ist. Daher erhalten wir die Definition: ein Winkel ist eine Ebene, welche von zwei Geraden begrenzt wird, welche von einem Punkte ausgehen."

§ 34: „Da der Winkel von doppeltem Standpunkt aus angesehen werden kann, so mufs er auch immer von beiden Standpunkten aus angesehen werden: einmal als Richtungsunterschied, das andere Mal als Ebene."[3])

---

[1]) Hier geht nun der Verfasser auf das Wesen des Winkels ein, indem er davon ausgeht, die Abhängigkeit der Elemente kennen zu lernen — die meiner Ansicht nach schon aus der Definition zu erkennen sein müfste. An die Stelle der kürzesten Drehung setzt er diejenige entlang einer Geraden, was nicht ohne weiteres als identisch anschaulich klar ist. Allerdings stimmt diese Erzeugungsart mit der bekannten der Ebene ja überein.

[2]) Der zuerst gewählte Ausdruck, dafs der Winkel den Unterschied der Richtungen (Strahlen) darstelle, scheint uns treffender.

[3]) Warum wird auf § 27 nicht rekurriert, der von der Abhängigkeit der Elemente des Winkels handelt und damit dasjenige liefert, was

Unter der Überschrift „Gröfse“ wird der Winkel in Verbindung mit dem Kreis gebracht und genaue Untersuchungen angestellt (§ 39—59), unter der Überschrift „Form“ das Resultat gefunden, dafs gleiche Winkel ähnlich sind und umgekehrt. Schliefslich folgen unter „Lage“ die Anwendungen, die durch die Lehre von den Parallelen unterbrochen werden.

Kunze, Lehrbuch der Geometrie. — Jena 1851.

p. 7: „Der Unterschied in der Richtung zweier geraden Linien, die von einem Punkte ausgehen, heifst ein Linienwinkel oder schlechthin ein Winkel.“

p. 8: „Drehung ist Veränderung der Richtung. Die Gröfse eines Winkels wird also beschrieben durch diejenige Drehung, welche man mit dem einen Schenkel in der Ebene, worin der Winkel liegt, vornehmen mufs, um stetig in die Lage des andern Schenkels überzugehen.“[1])

Unger, Die Geometrie des Euklid. — Leipzig 1851.

p. 18: „Zu Euklids Definition des Winkels bemerkt der Verfasser: „Diese Erklärung scheint insofern nicht genau, inwiefern man nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch eine Linie nur dann als geneigt gegen die andere ansieht, wenn sie mit ihr einen spitzen Winkel bildet.“ Euklid hebe aber durch den Zusatz „ohne in gerader Linie zu liegen“ die beschränkte Bedeutung auf.

Kosack, Beiträge zu einer systematischen Entwicklung der Geometrie aus der Anschauung. — Nordhausen 1852. (Progr.)

p. 8: „So findet man in vielen Kompendien der Geometrie, welche im allgemeinen nichts davon wissen wollen, dafs man um von der Gröfse eines Winkels im allgemeinen eine Vorstellung zu

die Wurzel der Definition ist. Die beiden andern sogenannten Definitionen des § 32 sind m. E. nur erläuternde Zusätze, aber von keiner wesentlichen Bedeutung gegenüber den Untersuchungen des § 27.

[1]) Es ist nicht recht verständlich, was es heifsen soll, die Gröfse des Winkels werde durch Drehung beschrieben; es müfste dann doch heifsen gemessen.

gewinnen sich den Winkel überhaupt durch Drehung einer Linie um einen Punkt entstanden denken mufs, und beim Beweise der übrigen Sätze vom Winkel diese Vorstellung vermeiden, den Satz, dafs gestreckte Winkel einander gleich sind, dadurch nachgewiesen, dafs gesagt wird, es sei zur Entstehung des gestreckten Winkels eine ganz bestimmte Drehung erforderlich. Wie anderswo, liegt auch hier in dem, was oft als lästiger Notbehelf angesehen wird, das Wesen der Sache. Denn um von der Gröfse eines Winkels eine klare Vorstellung zu gewinnen, bedarf man notwendig der Vorstellung des Kreises, dessen Entstehung mit der des Winkels gleichzeitig und notwendig erfolgt, wenn man sich letztern durch Drehung eines beweglichen Schenkels um einen seiner Endpunkte entstanden denkt."[1])

„Sieht man sich demnach gezwungen, nicht nur zur bessern, sondern einzig möglichen Einsicht in die Natur des Winkels, dessen Entstehung durch Drehung zu Hülfe zu nehmen, so mufs auch in der ganzen Winkelgröfsenlehre dieses Prinzip durchgeführt werden."

p. 13: „Solche zwei Linien verschiedener Richtung, welche miteinander einen Punkt gemein haben, bilden einen Winkel." Es wird dann noch einmal ausführlich auf die Drehung eingegangen.

August, Lehrbuch der Mathematik. — Berlin 1852.

p. 17: „Ein Winkel ist die Richtungsabweichung zweier geraden Linien, die von einem Punkte ausgehen. ... Die un-

---

[1]) Wir können uns hier mit dem Verfasser, dessen sonstige Ausführungen unsern vollen Beifall haben, nicht einverstanden erklären. Nicht der Kreis, sondern Drehung ist das wesentliche Moment zur Definition des Winkels. Es geht das schon daraus hervor, dafs wir zur Erzeugung des Kreises eines begrenzten Schenkels benötigen, während doch der Winkel von der Länge der Schenkel völlig unabhängig ist. Wäre der Kreis — etwa wie die Gerade — ein völlig eindeutiges Gebilde, dann würde des Verfassers Bemerkung zutreffend sein. — Das Vergleichen von Winkeln mittelst entsprechender Bogen darf uns aber nicht verführen, die Vorstellungen von Kreis und Winkel in der vom Verfasser beliebten Weise zu identifizieren.

vollständig begrenzte Ebene zwischen den Schenkeln des Winkels heifst Winkelblatt."

Fresenius, Die Raumlehre eine Grammatik der Natur. — Frankfurt a/M. 1853.

p. 35: „Das Drehungsstück, welches zwischen zwei von einem Punkte ausgehenden Richtungen zurückzulegen ist, wenn man von einer zur anderen kommen will, heifst Winkel.[1]) Je mehr zwischen zwei Richtungen gedreht werden mufs, desto gröfser ist der Winkel."

Gernerth, Grundlehren der ebenen Geometrie. — Wien 1857.

p. 9: „Es seien OA und OB zwei zusammenfallende gerade Linien, welche denselben Anfangspunkt O haben. Dreht man die eine derselben, etwa OB, in einer und derselben Ebene beliebig, so nimmt sie nach und nach andere Lagen an und fällt zuletzt wieder mit OA zusammen. Man sieht, dafs bei dieser Drehung die Richtung der Linie OB nach und nach immer mehr und mehr von der Richtung der Linie OA abweicht.

Die Abweichung der Richtungen zweier von demselben Punkte O auslaufender gerader Linien OA und OB heifst Winkel."

„Zwei von demselben Punkte ausgehende gerade Linien bilden immer zwei Winkel."

Snell, Lehrbuch der geradlinigen Planimetrie. — Leipzig 1857.

p. 19: „Denkt man sich zwei ungleichlaufende Linien nach der Zuneigungsseite verlängert, so entsteht durch ihr Zusammentreffen ein Raumgebilde,[2]) welches der Winkel heifst. An

[1]) Eine gute Erklärung, wenn man sich über den Ausdruck Drehungsstück klar ist; dies dürfte aber nicht allgemein vorausgesetzt werden dürfen.

[2]) Es geht weder aus dieser Erklärung selbst, noch aus den erläuternden Zusätzen, die sich mit den Bestandteilen des Winkels be-

dem Winkel unterscheidet man folgende Bestandteile: ..., drittens den Unterschied in der Richtung beider Schenkel des Winkels; derselbe heifst die Öffnung des Winkels. Dieser letztere Bestandteil, der Richtungsunterschied beider Schenkel oder die Öffnung, ist der wesentlichste, da von ihm allein die Gröfse des Winkels abhängt. Man wird sich der Gröfse des Richtungsunterschiedes beider Schenkel oder der Gröfse der Öffnung des Winkels bewufst durch eine drehende Bewegung ... Die Gröfse dieser drehenden Bewegung allein macht die Gröfse des Winkels aus."

Ley, Die Planimetrie. — Bonn 1858.

p. 8: „Ebener Winkel heifst die Begrenzung der Ebene nach einem Punkte hin.[1]) Dieser Punkt heifst der Scheitel des Winkels. Die nach dem Punkte hin begrenzte Ebene heifst die Fläche des Winkels.

Da eine Ebene nur durch Linien begrenzt wird, bei einem ebenen Winkel aber der Punkt bezeichnet sein mufs, nach welchem die Ebene begrenzt ist, so gehören zu einem ebenen Winkel zwei sich schneidende Linien."

„Ein Winkel heifst geradlinig, wenn seine Schenkel gerade Linien sind, krummlinig, wenn ..."

„Die Gröfse des Winkels hängt davon ab, wie viel von der Ebene nach dem Scheitel hin begrenzt sei."[2])

F. W. Becker, Lehrb. d. Elementargeometrie. — Oppenheim a. R. 1859.

p. 4: „Verlängert man zwei konvergierende Linien bis zu ihrem Durchschnitte, so heifst das bestimmte, aber unbegrenzte

---

schäftigen, hervor, ob Snell das Raumgebilde nur als Liniengebilde auffafst oder ob er das Ebenenstück dazu rechnet. Es scheint zuerst, als ob er der ersteren Ansicht zuneige; die Hereinziehung der Drehung aber, die die Ebene erzeugt, deutet doch wohl auf das zweite hin.

[1]) Eine eigenartige Erklärung, aus der ganz gewifs Niemand, der nicht schon eine anschauliche Vorstellung von dem Winkel hat, einen klaren Begriff bekommt.

[2]) Auch dieser Ausdruck entbehrt durchaus der Klarheit.

Stück der ebenen Fläche, welches sie einschliefsen, Winkel. Ein Winkel ist also das bestimmte, aber unbegrenzte Stück einer ebenen Fläche, welches von zwei sich schneidenden geraden Linien eingeschlossen wird."

„Denkt man sich den Schenkel *bc* des Winkels *abc* um den Scheitel *b* aufgehoben, so wird offenbar der Winkel wachsen, keineswegs aber ist dies der Fall, wenn die Schenkel des Winkels beliebig verlängert werden, ohne ihre Lage zu ändern. Es geht daraus hervor, dafs die Gröfse eines Winkels nur von dem Richtungsunterschiede der Schenkel, nicht aber von der Länge derselben abhängt."

Heidenreich, Die Elemente der niederen Geometrie. — Leipzig 1859.

p. 5: „Unter Winkel versteht man den Unterschied in der Richtung zweier Geraden."

„Ein Winkel entsteht, wenn man eine Gerade, um den einen ihrer Endpunkte drehend, in eine andere Richtung übergehen läfst. Die Gröfse des Winkels wird nicht durch die Länge der Schenkel, auch nicht durch den Raum zwischen den beiden Schenkeln bestimmt, sondern durch die Gröfse der Drehung, die nötig ist, um aus der Richtung des einen Schenkels in die des andern Schenkels zu gelangen."

„Will man für die Gröfse dieser Drehung, also für die Gröfse des Winkels, ein bestimmtes Mafs einführen, so bietet sich am einfachsten die ganze Umdrehung dar."

Franke, Die Elemente der ebn. Geometrie. — Hannover 1860.

p. 8: „Eine Gerade von bestimmter[1]) Länge drehe sich um einen ihrer Endpunkte. Jede neue Lage der sich drehenden Geraden wird eine gröfsere oder kleinere Ablenkung gegen die ursprüngliche Lage bezeichnen. Diese Ablenkung nennt man allgemein Winkel."

Der Kreis als Mafs des Winkels. Drehung.

---

[1]) Dies ist doch ganz unwesentlich; deshalb aber sogar zu verwerfen, weil es geeignet ist, eine höchst einschränkende Bestimmung in die Erklärung des Winkelbegriffes hineinzubringen.

Zerlang, Beitrag zu einer genetischen Entwicklung der Planimetrie. — Sorau 1860 (Progr.).

p. 9: „Dreht man eine gerade Linie um einen in ihr befindlichen als fest angenommenen Punkt, der Einfachheit wegen z. B. einen Strahl um seinen Anfangspunkt stetig nach einer Seite hin bis in eine beliebige andere Richtung, so heifst die Gröfse der Drehung, durch welche der Strahl von seiner ursprünglichen Richtung in die neue gelangte, ein Winkel."

„Denkt man sich die ursprüngliche Richtung des Strahles durch einen zweiten Strahl vertreten, so kann man auch sagen: „Ein Winkel ist der Richtungsunterschied zweier von einem Punkte ausgehender Strahlen."

Giffhorn, Leitfaden der ebenen Geometrie etc. — Braunschweig 1862.

p. 12: „Dreht eine Linie von unbestimmter Länge sich um ihren festliegenden Anfangspunkt aus ihrer ursprünglichen Lage in irgend eine andere Lage, so nennt man den Richtungsunterschied der Linien Winkel ... Die Gröfse des Winkels hängt demnach nicht von der Länge der Schenkel, sondern von der Gröfse der Drehung ab."

Wiegand, Planimetrie. — Halle 1863.

p. 13: „Die Abweichung der Richtungen zweier geraden Linien wird ein Winkel genannt."

„Von dem wahren Sinne des Wortes „Abweichung" bekommt man erst dann einen deutlichen Begriff, wenn man sich den Winkel als durch Drehung eines seiner Schenkel, während der andere als festliegend angenommen wird, entstanden denkt."

Dronke, Die Elemente der ebn. Geometrie. — M.-Gladbach 1864.

p. 1: „Ein Winkel ist eine ebene Figur, welche von zwei von einem Punkte ins Unendliche fortlaufenden Geraden begrenzt wird."

Funck, Das Euklidische System der Geometrie der Ebene. — Berlin 1864.

p. 2: „Wenn zwei gerade Linien sich schneiden, so nennt man die gröfsere oder geringere Abweichung in der Lage derselben von derjenigen Lage, in welcher die eine auf die andere fällt, einen ebenen, geradlinigen Winkel."

Weifsenborn, Die Elemente der Planimetrie. — Halle 1864.

p. 19: „Zwei von demselben Punkte in verschiedener Richtung ausgehende von dem Punkte einseitig begrenzte Gerade bilden einen Winkel."

„Ein Winkel ist der Richtungsunterschied zweier Geraden."

p. 22: „Man kann sich jeden beliebigen Winkel auch dadurch entstanden denken, als hätten in der einen Geraden anfangs zwei Gerade über einander gelegen, und als sei dann, während die eine unverändert liegen geblieben sei, die andere um den festen Punkt so lange gedreht worden, bis sie in die Lage der andern gekommen sei, nachdem sie alle dazwischen fallenden Lagen während der Drehung eingenommen habe."

Sonndorfer, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1865.

p. 12: „Verlängern wir zwei gerade Linien verschiedener Richtung so lange, bis sie sich schneiden, so entsteht durch ihren Durchschnitt ein neues geometrisches Gebilde, der Winkel. Wir nennen nämlich den von diesen beiden geraden Linien dann begrenzten Teil der Ebene einen Winkel. Nehmen wir jedoch auf die Richtung der beiden Geraden Rücksicht, so ergiebt sich für dieses neue geometrische Gebilde folgende Definition:

Ein Winkel ist der Richtungsunterschied zweier gerader Linien."

Es wird dann auch noch auf die „Gröfse der Drehung" eingegangen.

Sonnenburg, Ebene Geometrie. — Bremen 1868.

p. 11: „Ein Winkel ist der Richtungsunterschied zweier geraden Linien, die von einem Punkte ausgehen."

Teirich, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1868.

p. 6: „Zwei in einer Ebene befindliche Gerade, die nicht dieselbe Richtung haben, werden notwendig in einem Punkte zusammentreffen. Das Stück der Ebene, welches dann zwischen diesen beiden Geraden liegt, heifst ein Winkel. Aus der Gröfse des Winkels beurteilt man die Abweichung der Richtung der einen Geraden von der Richtung der andern. Der Winkel erscheint sonach als der Unterschied zwischen den Richtungen zweier in einem Punkte zusammenstofsenden oder von ihm auslaufenden geraden Linien."[1])

„Man kann sich die Entstehung des Winkels auch noch auf eine andere Weise denken, welche zwar von der vorigen nicht wesentlich verschieden ist, aber das tiefere Eingehen in die Natur des Winkels sehr erleichtert.[2]) Man lasse eine Gerade sich um ihren unbeweglichen Anfangspunkt in einer Ebene drehen, so entsteht ein Winkel und giebt die Gröfse dieser stetigen Drehung an."

Adam, Lehrbuch der eb. u. körpl. Geometrie. — Berlin 1869.

p. 13: „Durch einen Punkt einer Ebene können unzählig viele gerade Linien gezogen werden, welche sämtlich verschiedene Richtung haben.

Der Teil der Ebene, welcher zwischen zwei von einem Punkte ausgehenden geraden Linien liegt, heifst ein (geradliniger) Winkel."

Beez, Die Elemente der Geometrie. — Plauen 1869.

p. 13: „Ein Ausschnitt einer Ebene, der von zwei in einem Punkte O sich treffenden Geraden OA, OB gebildet wird, heifst ein ebener Winkel..."

Rummer, Elementargeometrie. — Heidelberg 1869.

p. 3: „Die Linien haben verschiedene Richtung, dann

[1]) Nach dem Vorhergehenden ist das nicht richtig. Wenn man nach der Gröfse des Winkels die Abweichung beurteilt, so ist der Winkel das Mafs für den Unterschied, aber nicht der Unterschied selbst.

[2]) Dies Zugeständnis hätte dazu führen sollen, den hier berührten Punkt zum Ausgangspunkte der Erklärung des Winkelbegriffes zu machen.

schneiden sie sich entweder unmittelbar oder nach gehöriger Verlängerung und bilden einen oder mehrere Winkel."

„Der Winkel ist daher der Unterschied der Richtung zweier Linien."

F. Becker, Die elementare Geometrie in neuer Anordnung. — Hanau 1870. (Progr.)

p. 9: „Zwei Strahlen, welche von einem Punkte auslaufen, bilden einen Winkel; die Gröfse eines Winkels hängt von dem Mafse der Drehung um den Scheitel ab, durch welche man, in einer und derselben Ebene bleibend und in einerlei Sinne fortschreitend aus der Lage des einen Schenkels in die des andern gelangt."

Frischauf, Elemente der Geometrie. — Graz 1870.

p. 3: „Der Unterschied der Lage[1]) zweier Strahlen oder Halbstrahlen wird ein Winkel genannt."

„Ein Winkel entsteht, indem man einen Halbstrahl um den Mittelpunkt in einer Ebene dreht. Die Gröfse dieser Drehung wird ebenfalls Winkel genannt."

Grunert, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — (6. Aufl.) Brandenburg a. d. H. 1870.

p. 17: „Wenn zwei nicht zusammenfallende gerade Linien AB und AC von einem Punkte A ausgehen, so sind sie offenbar rücksichtlich ihrer Lage verschieden und die Gröfse dieser Verschiedenheit der Lage, die Gröfse der Abweichung der beiden Linien von einander, wird durch den von ihnen eingeschlossenen Winkel bestimmt. Ein Winkel ist also nichts anderes als die Abweichung zweier von einem Punkte A ausgehender geraden Linien AB, AC von einander in Bezug auf ihre gegenseitige Lage."[2])

---

[1]) Lage wird nicht erklärt. — Strahl wird identisch mit Gerade gebraucht.

[2]) Wenn durch den Winkel die Verschiedenheit der Lage zweier Geraden bestimmt wird, so ist doch nicht der Winkel die Verschiedenheit. Die logische Konsequenz aus dem ersteren ist, dafs der Winkel

Zur Verdeutlichung wird dann noch auf die Drehung eingegangen.

Heis und Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie. — Köln 1870.

p. 5: „Zwei gerade Linien, welche von einem Punkte ausgehen, haben eine verschiedene Lage. Um die Gröfse dieser Verschiedenheit zu bestimmen, hat man sich vorzustellen, die eine dieser Linien drehe sich um den Punkt, von dem beide auslaufen, in einer und derselben Ebene und nach einerlei Richtung so lange um, bis sie mit der andern zusammenfällt. Die Gröfse der Umdrehung, die hierzu erforderlich ist, wird Winkel genannt. Der Winkel ist also eine Gröfse eigener Art,[1] durch welche die Verschiedenheit der Lage zweier von einem Punkte ausgehenden geraden Linien bestimmt wird."

Winkelraum oder Winkelebene.

Joh. Müller, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Bremen 1870.

p. 22:[2] „Zwei Geraden, welche sich durch Drehung ohne Verschiebung zur Deckung bringen lassen, heifsen geneigt."

„Die von zwei geneigten Geraden gebildete Figur heifst ein Linienkreuz."

„Die Lage zweier geneigten Geraden gegeneinander (die Gestalt eines Linienkreuzes) ist nur von der Grösse der Drehung abhängig, welche erforderlich ist um die beiden Geraden zur Deckung zu bringen."

„Die Veränderung einer Richtung ohne Veränderung des Ortes und ohne Veränderung der Ebene, in welcher die Richtung liegt, nennen wir eine einfache Drehung."[3]

---

das Mafs der Verschiedenheit ist. Wenn die Länge eines Gegenstandes durch einen Stock bestimmt wird, so ist der Stock weder die Länge noch der Gegenstand, sondern das Mafs für die Länge des Gegenstandes.

[1] Eine Mafsgröfse, wenn ich mich dieses Ausdrucks bedienen darf.

[2] Man vergleiche das Zitat aus Joh. Müller im zweiten Kapitel.

[3] Das ist nicht klar ausgedrückt. Man weifs ja, was gemeint ist, aber die Worte „Veränderung der Richtung ohne Veränderung des Ortes" sind wenig glücklich gewählt.

„Die Gröfse einer einfachen Drehung heifst ein Winkel.“[1])

„Unter einem Winkelraume oder dem Raume eines Winkels versteht man denjenigen Teil der Ebene, welcher von einem die Drehung des Winkels ausführenden Strahle durchlaufen wird.“

Die ganzen Bewegungserscheinungen werden noch ausführlich behandelt, wodurch grofse Klarheit in die Lehre vom Winkel kommt. Besonders bemerkenswert erscheint noch der folgende Satz: „Gewisse bestimmte Winkelgröfsen zeichnen sich vor den übrigen durch die Einfachheit ihrer Bestimmtheit aus (Ähnliches findet bei den Strecken nicht statt) und bilden deshalb die natürliche Grundlage für die Vergleichung der Messung (einfache Drehung = ganze Umdrehung).

Brockmann, Lehrbuch der elementaren Geometrie. — Leipzig 1871.

p. 4: „Der von selbst gegebene Begriff der geraden Linie schliefst den der Richtung in sich. Wenn nun von einem Punkte A zwei verschiedene Gerade ausgehen, so heifst die Abweichung der Richtung der einen von der Richtung der anderen ein Winkel.“

„Da die Richtung der Geraden von der Länge derselben unabhängig ist, so hängt auch die Gröfse des Winkels nicht von der Länge seiner Schenkel ab.“

„Die Gröfse des Winkels hängt von der Gröfse der Drehung ab, welche der eine seiner Schenkel um den festen Scheitel machen mufs, um in die Lage des anderen zu gelangen. Bei dieser Drehung beschreibt jeder Punkt des gedrehten Schenkels (aufser dem Scheitelpunkt) den Bogen eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Scheitel ist; es ist daher mit der Vorstellung von der Gröfse eines Winkels die Vorstellung des Kreises unzertrennlich verbunden.“[2])

---

[1]) Nachdem einmal der Begriff des „Linienkreuzes“ eingeführt war, wäre es nötig gewesen, die Beziehung zwischen Linienkreuz und Winkel klarzulegen. Statt dessen wird von dem neuen Begriffe ganz abgesehen und völlig getrennt davon der Zusammenhang zwischen Drehung und Winkel erörtert.

[2]) Das ist nicht wahr. Man braucht sich gar nicht einen bestimmten Punkt bei der drehenden Bewegung des Strahles auf diesem

Hartmann, Genetischer Leitfaden. — Bautzen 1872.

p. 3: „Die wesentlichste Eigenschaft eines Winkels ist der Richtungsunterschied (Abweichung) seiner beiden Schenkel.[1]) Wie kann man die Gröfse desselben durch drehende Bewegung des einen Schenkels messen?“

„Wie mufs man sich einen Winkel entstanden denken? Was ist hiernach ein Winkel? Ist es richtig, wenn man sagt: Ein Winkel entsteht, wenn zwei Geraden von verschiedener Richtung in einem Punkte zusammentreffen?“

Hering, Planimetrie. — Leipzig 1872.

p. 5: „Wenn man in einer Fläche[2]) von einem Punkte aus zwei Strahlen zieht, wird die Fläche in zwei Teile geteilt und jeder solche Teil heifst ein Winkel.“

p. 8: „Man kann sich einen Winkel dadurch entstanden denken, dafs sich ein mit dem Endpunkte festliegender Strahl in einer Ebene um diesen Endpunkt aus einer Lage in eine andere dreht. Bei dieser Drehung giebt die Gerade in jedem Augenblicke eine andere Richtung an. Die Gröfse der Richtungsänderung wird durch den Raum, den der sich drehende Strahl durchlaufen hat, also durch den Winkel gemessen, den der Strahl in seiner neuen Lage mit der ursprünglichen Lage bildet, d. h. der Richtungsunterschied nimmt in demselben Mafse ab oder zu, in welchem der Winkel ab oder zunimmt.“

Sadebeck, Elemente der ebenen Geometrie. — Breslau 1872.

p. 4: „Wenn zwei gerade Linien in einem Punkte zusammentreffen, so bilden sie einen geradlinigen Winkel. Die

---

vorzustellen. Man thut es auch in der That gar nicht. Der Strahl als Ganzes dreht sich und diese Bewegung wird von uns angeschaut, nicht die Bewegung der einzelnen Punkte auf dem Strahle. Hierzu müfste ausdrücklich ein Punkt auf dem Strahle gegeben sein. Aber selbst in diesem Falle scheint es mir schwierig, neben der Allgemeinbewegung des Strahles sich die Sonderbewegung des geg. Punktes vorzustellen. Es wird das ganz gewifs nur dem Geübteren gelingen. Man versuche es nur einmal beide Vorstellungen gleichzeitig anschaulich zu denken.

[1]) Der Richtungsunterschied eine Eigenschaft des Winkels!

[2]) Mufs heifsen: Ebene.

Gröfse desselben hängt nicht von der Länge der beiden geraden Linien, sondern von ihrer gegenseitigen Abweichung (Auseinandersperrung) ab.

Ein geradliniger Winkel ist die Gröfse der Abweichung zweier in einem Punkte zusammentreffenden geraden Linien."

Schlegel, System der Raumlehre. — Leipzig 1872.

p. 35: „Ein von zwei Geraden mit ungleicher Richtung eingeschlossener Teil der Ebene heifst Ebenenwinkel."

„Um die Gröfse der Bewegung der Geraden bestimmen zu können, ist ein neuer Begriff erforderlich, da diese Bewegung nicht mehr eine Schiebung, sondern eine Drehung ist. Wir bezeichnen den Richtungsunterschied der beiden Geraden mit dem Namen „Winkel." — Wie die Lagenunterschiede durch die Strecke, so werden die Richtungsunterschiede durch den Winkel bestimmt. Derselbe hat nur die Eigenschaft der Gröfse."[1])

Job, Lehrbuch der Planimetrie. — Dresden 1873.

p. 9: „Unter einem Winkel versteht man den Grad[2]) der Drehung einer geraden Linie um einen ihrer festen Punkte.

Da man sich die Drehung weiter oder weniger weit fortgesetzt denken kann, so kann man den Winkel vermehren und vermindern, woraus folgt, dafs der Winkel eine Gröfse ist. Zum Unterschied von den übrigen Gröfsen wird der Winkel eine Drehungsgröfse genannt."

„Die unendliche Fläche zwischen den Schenkeln wird Winkelraum genannt."

Nagel, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Ulm 1873.

p. 2: „Der Winkel ist die Verschiedenheit der Richtungen zweier geraden Linien, welche in einem Punkte zusammentreffen."

---

[1]) Man vergleiche meine Ausführungen auf Seite 122.

[2]) Dieser Ausdruck stimmt dem Wesen nach mit dem von mir gewählten „Mafs der Drehung" völlig überein.

Spieker, Ebene Geometrie. — Potsdam 1873.

p. 6: „Die Gröfse des Richtungsunterschiedes zweier in einer Ebene von einem Punkt ausgehender geraden Linien heifst Winkel; der Teil der Ebene, welcher zwischen diesen beiden bis ins Unendliche ausgedehnten Geraden liegt, Winkelraum, Winkelfläche, oder oft auch Winkel schlechthin."

„Wird eine halb begrenzte gerade Linie in einer Ebene um ihren Endpunkt gedreht, d. h. verändert sie stetig ihre Richtung, während der Endpunkt festliegt, so beschreibt sie einen Winkelraum, und der Winkel, welchen die gedrehte Linie mit ihrer anfänglichen Richtung bildet, ist das Mafs der Drehung."

Baltzer, Die Elemente der Mathematik. — Leipzig 1874.

p. 5: „Eine Ebene wird von zwei auf ihr sich schneidenden Geraden in vier Felder geteilt, welche Winkel heifsen."

Die Eindeutigkeit der Winkel wird dann unter Zuhülfenahme der Drehung und der Richtung in den Geraden bestimmt.

p. 7: „Aus der Gröfse des von zwei Schenkeln eingeschlossenen Winkels beurteilt man die Abweichung der Richtung des einen Schenkels von der Richtung des anderen, sowie die scheinbare Länge einer in dem Winkel enthaltenen und durch die Schenkel begrenzten Linie, wenn diese vom Scheitel aus betrachtet wird."

In einer Anmerkung wird hinzugefügt: „Die Definitionen „Winkel ist die Neigung von zwei Linien gegeneinander" (Eukl. I) oder „der Unterschied ihrer Richtungen" oder „die Gröfse der Drehung, wodurch der eine in die Richtung der andern gebracht wird," machen den Winkel zu einer intensiven Gröfse, und stimmen nicht zu den üblichen Redeweisen[1]) z. B. ein Punkt liegt in oder aufser dem Winkel, eine Gerade

[1]) Dies ist kein Grund gegen eine Definition. Ist die Definition eines Begriffes sonst richtig, so müssen die damit nicht in Übereinstimmung stehenden Redensarten eben geändert werden. So ist z. B. von den hier genannten jedenfalls die zweite völlig zu verwerfen, da das Dreieck vorzugsweise als Figur (Liniengebilde), nicht als Feld zu betrachten ist.

schneidet von dem Winkel ein Dreieck ab, u. dergl. Als Ausschnitt der Ebene ist der Winkel von Bertrand (Développement nouveau de la partie élém. des Math. — Genève 1778 II p. 6) aufgefafst worden."

Hèlmes, Planiometrie. — Hannover 1874.

p. 14: „Der Unterschied der Richtungen zweier von einem Punkte ausgehender gerader Linien OA, OB, welcher Unterschied gebildet und gemessen wird durch die Gröfse der Drehung, die man in der Ebene der beiden geraden Linien mit der einen um den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt beider vornehmen mufs, um sie in die Lage oder Richtung der anderen zu bringen, heifst der von den beiden geraden Linien gebildete Winkel."

„Winkelfläche ist der Teil der Ebene zwischen den Schenkeln."

Kober, Leitfaden. — Leipzig 1874.

p. 8: „Die Richtung einer Linie läfst sich stetig ändern durch Drehung um einen Punkt in ihr; am anschaulichsten verwendet man hierzu einen Strahl, d. h. eine (durch den Drehungspunkt) einseitig begrenzte Linie. Durch diese Drehung wird die Abweichung der veränderlichen Richtung gegen die ursprüngliche, der Richtungsunterschied, stetig vergröfsert. Dieser Richtungsunterschied, mefsbar gemacht, heifst Winkel."[1])

„Als Mafs des Winkels dient die ganze Drehung."[2])

Hub. Müller, Leitfaden der eb. Geometrie. — Leipzig 1874.

p. 2: „Zwei Gerade, welche sich schneiden, teilen die Ebene in vier Felder, welche Winkel genannt werden."

---

[1]) D. h. mit anderen Worten, der Winkel ist das Mafs des Richtungsunterschiedes.

[2]) Nicht als Mafs, sondern als Mafseinheit. Besser würde man ferner sprechen von einer „vollen Umdrehung". Die ganze Drehung ist unendlich. Vergleiche Seite 123.

„Ein Winkel wird als Maſs für den Richtungsunterschied seiner Schenkel betrachtet oder als Maſs für die Gröſse der Drehung, welche einer seiner Schenkel (Anfangsschenkel) machen muſs, um mit dem andern Schenkel (Endschenkel) zusammenzufallen.“

Diesen Sätzen stehen die analogen über die Strecke dual[1]) gegenüber: „Zwei Punkte einer Geraden begrenzen ein Stück derselben, welches Strecke genannt wird.“

„Eine Strecke wird als Maſs für den Abstand ihrer Endpunkte betrachtet oder als Maſs für den geradlinigen Weg, welchen der eine Punkt (Anfangspunkt) zurücklegen muſs, um mit dem anderen (Endpunkte im engeren Sinne) zusammenzufallen.“

Schlömilch, Geometrie des Maſses. — Leipzig 1874.

p. 11: „Sind zwei Geraden von verschiedener Richtung soweit verlängert, daſs sie in einem Punkte zusammentreffen, so entsteht an diesem Punkte ein neues geometrisches Gebild: der Winkel. Dieser zeigt an, um vieviel die Richtungen der Geraden voneinander abweichen; ein Winkel bestimmt also den Unterschied zwischen den Richtungen zweier Geraden, welche in einem Punkte zusammentreffen oder von letzterem ausgehen.“

p. 12: „Man kann sich die Entstehung des Winkels noch auf eine andere Weise denken, welche zwar von der vorigen nicht wesentlich verschieden ist, aber die Einsicht in die Natur des Winkels sehr erleichtert.[2]) Lassen wir nämlich eine Gerade sich um ihren Anfangspunkt drehen, bis sie in eine zweite Lage gelangt ist, so entsteht ebenfalls ein Winkel; man kann daher sagen: der Winkel ist bestimmt durch

---

[1]) Daſs das fruchtbare Prinzip des Dualismus schon im Anfangsunterricht mit Erfolg verwertet werden kann, ist auch meine Ansicht. Gerade bei Strecke und Winkel erweist es sich als für die Definition äuſserst vorteilhaft. Man vergleiche meine entsprechenden Ausführungen Seite 121 f.

[2]) Worin überhaupt die Natur des Winkel begründet liegt.

die Gröfse der Drehung,[1]) welche erfordert wird, um die Gerade in die zweite Lage zu bringen."

Wagner, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Hamburg 1874.

p. 9: „Die Abweichungsgröfse zweier Strahlen heifst ihr Winkel."

Worpitzky, Planimetrie. — Berlin 1874.

p. 10: „Jede aus zwei geraden Teilen bestehende Linie heifst ein Winkel."[2])

p. 39: „Jedes durch einen Winkel begrenzte Stück einer übrigens unbegrenzten Ebene heifst ein Winkelfeld oder auch schlechthin ein Winkel."

Hablützel, Lehrbuch der synthetischen Geometrie. — Leipzig 1875.

p. 8: „Ein Winkel wird beschrieben, wenn ein Abschnitt einer zweiteiligen Geraden in einer Ebene sich um ihren (unveränderlichen) Schnittpunkt so weit stetig dreht, dafs jener dem andern Abschnitte sich mehr oder weniger nähert, ohne mit diesem zu koinzidieren, während jeder andere Punkt der konstruktiven (sich bewegenden) Strecke einen Bogen durchläuft, welcher die Gröfse der Drehung in sich schliefst, — mithin ist die Gröfse eines Winkels durchaus unabhängig von der Länge seiner Radialen, abhängig dagegen von der Richtung, welche dieselben haben."[3])

Kruse, Elemente der Geometrie. — Berlin 1875.

p. 6: „Wenn zwei Gerade in einem Punkte zusammentreffen, so heifst die Gröfse der Drehung der einen Geraden

---

[1]) Und umgekehrt; d. h. im Winkel wird die Gröfse der Drehung veranschaulicht, er ist das Mafs für die Drehung.

[2]) Man vergleiche: Worpitzky, Über die Grundbegriffe der Geometrie; Grunerts Archiv, Bd. 55, p. 405 f.

[3]) Eine etwas gewundene Erklärung, die aber im wesentlichen das Richtige trifft, da sie den richtigen Ausgangspunkt nimmt.

um den gemeinsamen Endpunkt und in der Ebene beider Geraden, durch welche sie in die Lage der anderen Geraden gelangt, ein Winkel beider Geraden." (Nach v. Münchow.)

Drehungssinn.

Kröger, Leitfaden f. d. Geometrie-Unterricht. — Hamburg 1876.

p. 4: „Zwei ungleich laufende Gerade, die von einem Punkte ausgehen, haben verschiedene Richtung. Wenn man die Gröfse dieser Verschiedenheit beurteilen will, so denke man sich, die eine der Geraden drehe sich um den Schnittpunkt so weit, bis sie die andere deckt. Die Gröfse einer solchen Drehung heifst Winkel."

Schurig, Elemente der Geometrie. — Plauen 1876.

p. 4: „Winkel ist der Teil der unendlichen Ebene, welcher zwischen zwei von einem Punkte ausgehenden Strahlen liegt."

Zmurko-Fabian, Lehrbuch der Mathematik. — Lemberg 1876.

p. 19: „Die Gröfse der Abweichung einer Geraden von der Richtung einer anderen Geraden heifst Winkel."[1])

Es schliefsen sich Betrachtungen über den Zusammenhang mit der Drehung an.

J. K. Becker, Lehrbuch d. Elem.-Geom. — Berlin 1877.

p. 14: „Das Gebilde aus zwei in einem gemeinschaftlichen Endpunkte O zusammentreffenden Strecken OA, OB heifst ein Winkel; ... vielmehr betrachtet man den Winkel als unverändert, wenn man die Schenkel beliebig verlängert. Es kann mithin als das zu Vergleichende nur noch der Unterschied in der Stellung der Schenkel, d. h. die Gröfse der Drehung übrig bleiben, durch welche der eine Schenkel in die Lage des andern gebracht werden kann."

---

[1]) Das unbegrenzte Winkelblatt wird hier Sektor genannt und auch wohl Sektor mit Winkel identifiziert. „Der Sektor DAC stellt den von den Geraden AC und AD eingeschlossenen Winkel vor."

Besprechung des doppelten Drehungssinnes.

„Den Teil der Ebene, durch welchen man sich den einen Schenkel bewegt denkt, damit er in die Lage des anderen kommt, bezeichnet man als die Winkelfläche. Die Gröfse der dazu erforderlichen Drehung betrachtet man als die Gröfse des Winkels."

J. K. Becker,[1]) Die Elemente d. Geom. auf neuer Grundlage. — Berlin 1877.

p. 16: „Treffen zwei gerade Strecken oder 2 Halbgerade in einem Punkte zusammen, so sagt man, sie bilden einen Winkel ... Ursprünglich ist wohl unter einem Winkel, wie schon daraus hervorgeht, dafs man von seinem Scheitel und seinen Schenkeln spricht, nichts anderes verstanden worden, als die Figur, welche er darstellt."

Die Veränderung der Länge der Schenkel hat keinen Einflufs auf die Gröfse des Winkels. „Da aber durch diese Veränderung der Schenkel die Figur eine andere wird, bleibt als Inhalt des Begriffes Winkel nur noch eine von der Länge der Schenkel unabhängige Eigenschaft dieser Figur übrig."

p. 34: „Da man bei der Vergleichung der Winkel von der Länge ihrer Schenkel abstrahiert, so bleibt als unterscheidendes Merkmal derselben nur noch die Gröfse der Drehung übrig, die der eine Schenkel in der Ebene um den Scheitel als Mittelpunkt ausführen mufs, um in die Lage des anderen zu gelangen. Denn nur mit der Gröfse dieser Drehung ändert sich die Figur des Winkels, wenn die Länge der Schenkel aufser Betracht bleibt. Denken wir uns einen Winkel dadurch entstanden, dafs wir uns die beiden Schenkel ursprünglich in eine Gerade zusammenfallend vorstellen und dann den einen um den Scheitel so in Drehung versetzt, dafs er immer in derselben Ebene bleibt, so können wir, was wir an dem Winkel noch betrachten, auch als den Drehungsabstand zwischen den beiden Schenkeln bezeichnen, und dies macht auch den ganzen Inhalt dessen aus, was wir unter einem Winkel verstehen, wenn wir ihn als selbständige Figur d. h. unabhängig

---

[1]) Auf dieses Zitat möchte ich ganz besonders aufmerksam machen.

von dem Teil der Ebene, zu dessen Begrenzung er gehört, betrachten."

Es folgen dann noch Betrachtungen über ganze und halbe Umdrehung.

Behl, Die Darstellung der Planimetrie. — Hildesheim 1877.

p. 8: „Wenn von einem Punkte zwei gerade Linien nach verschiedenen Richtungen hin ausgehen, oder wenn sich zwei gerade Linien in einem Punkte treffen, so entsteht ein Winkel."

„Der Raum zwischen den Schenkeln heifst der Winkelraum und die Entfernung der beiden Schenkel nennt man die Schenkelweite oder die Neigung der Schenkel. Die Gröfse eines Winkels wird bedingt durch die Neigung der Schenkel zu einander, und zwar ist ein Winkel um so gröfser, je weiter die Schenkel voneinander entfernt[1]) sind und umgekehrt; von der Länge der Schenkel ist die Gröfse des Winkels unabhängig."

Boymann, Lehrbuch der Mathematik I. Köln u. Neufs 1877.

p. 6: „Haben zwei Gerade einen Punkt gemeinsam, so haben sie verschiedene Richtung; haben beide Geraden verschiedene Richtung, so sind sie ungleich laufend, schneiden sich verlängert in einem Punkte und bilden an dem Durchschnittspunkt durch ihr Zusammentreffen einen Winkel."

p. 11: „Ein Winkel entsteht dadurch, dafs zwei gerade Linien von einem Punkte nach verschiedener Richtung auslaufen. Die Gröfse des Richtungsunterschiedes hierbei ist es, was man Winkel nennt.

Unter Winkel versteht man daher die Gröfse der Drehung, welche die eine von zwei von einem Punkte ausgehenden Geraden um den gemeinsamen Punkt hätte machen müssen, um aus der Lage der anderen in ihre Lage zu gelangen."

Gilles, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Heidelberg 1877.

[1]) Ein höchst unklarer Ausdruck.

p. 10: „Alle möglichen Beziehungen zweier sich schneidenden Geraden zu einander werden erhalten, wenn sich eine Gerade um einen ihrer Punkte dreht, bis sie in die ursprüngliche Lage zurückkehrt. Bei dieser Drehung verändert sie beständig ihre Richtung, welche Richtungsänderung von der Gröfse der Drehung abhängt."

„Der Richtungsunterschied wird Winkel genannt."

Heinze, Die Elementargeometrie. — Berlin 1877.

p. 20: Winkel und Richtungsabweichung werden einfach identifiziert; Verfasser braucht immer das zweite Wort.

Wohlgemuth, Lehrbuch der Geometrie. — Libau 1877.

p. 3: „Die Abweichung einer Richtung von einer andern nennt man den Winkel zwischen diesen beiden Richtungen."

p. 4: „Die Gröfse eines Winkels wird abhängig sein von der Abweichung der beiden Schenkel."

p. 5: „Wir können den Winkel auch noch in anderer Weise erklären: Denken wir eine beliebige Gerade um einen ihrer Endpunkte gedreht, so wird sie nach und nach immer verschiedene Richtungen annehmen, und in jeder neuen Lage wird sie mit ihrer ersten Lage einen bestimmten Winkel bilden, und zwar wird dieser Winkel um so gröfser sein, je weiter die Gerade aus ihrer ursprünglichen Richtung herausgedreht ist. Der Winkel ist also hiernach das Mafs für die Gröfse der Drehung . . ."

Polster, Geometrie der Ebene. — Würzburg 1877/78. (Progr.)

p. 15:[1]) „Jeder von den beiden Ausschnitten, in welche eine Ebene durch zwei von demselben Punkte auslaufende

---

[1]) Im Vorwort sagt der Verfasser: „Da ich Euklids Definition des Winkels für unfruchtbar halte, so habe ich mich der Definition Bertrands angeschlossen, wodurch mit Hülfe der modifizierten Fassung des 9. Axioms das 11. Axiom Euklids (oder ein Aquivalent desselben) als Axiom entbehrlich, als Theorem streng beweisbar wird."

Strahlen geteilt wird, heifst ebener Winkel oder Linien-Winkel."

„Der Winkel ist das Mafs für die Divergenz seiner Schenkel."

Focke und Krafs, Lehrbuch der Geometrie. — Münster 1878.

p. 2: „Schneiden sich zwei gerade Linien in einem Punkte *A*, so mufs die eine, um in die Lage der anderen zu kommen, eine bestimmte Drehung machen. Die Gröfse dieser Drehung heifst Winkel."

Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie. — Berlin 1878.

p. 275: „Was die Richtung anbelangt, so können zwei Richtungen, wie zwei Qualitäten überhaupt, nicht absolut mit einander verglichen werden, sondern nur dadurch, dafs sie auf eine dritte bezogen und das Mafs ihrer Unterschiede von dieser dritten verglichen wird."[1])

„Der einfachste Fall zweier zu vergleichenden Richtungen findet statt, wenn zwei Richtungen denselben Ausgangspunkt haben. In diesem Falle kann man die, einer von diesen Richtungen kontradiktorisch entgegengesetzte, als die dritte feste Richtung annehmen, von welcher aus die Richtungsunterschiede zu messen sind.[2]) Ein Gebilde, dessen Elemente einen gemeinsamen Punkt haben, wobei aber die Ausdehnungen unbestimmt bleiben, gleichgültig für die jeweilige Betrachtung, nennt man Winkel."[3])

Unverzagt,[4]) Der Winkel etc. — Wiesbaden 1878.

---

[1]) Man vergleiche meine Ausführungen auf Seite 107.

[2]) Wozu dieser Umweg, der idem per idem zu erklären Veranlassung giebt.

[3]) So sehr ich sonst in vielen Beziehungen mit dem Verfasser übereinstimme, bei dieser Definition scheint er mir in Künstelei verfallen zu sein und darüber das eigentliche Wesen des zu erklärenden Begriffs übersehen zu haben.

[4]) Auf dieses Zitat möchte ich besonders hinweisen.

p. 11: „Die Definition eines Winkels kann verschieden gegeben werden. Es kann dieser zweite Konstruktionsbegriff geometrischer Betrachtung — die Strecke als ersten angenommen — aufgefafst werden als das Lagengebilde zweier Strahlen, die von einem Punkte aus gezogen sind, oder als ein Ausschnitt aus einer Ebene. Wie man aber die Strecke als Stellendifferenz ihrer Endpunkte behandeln darf, so kann man den Winkel als die Richtungsdifferenz seiner Schenkel definieren. Wir werden ihn im folgenden vorwiegend als die Gröfse der Drehung auffassen, die sein einer Schenkel beschreiben mufs, bis er mit dem andern zusammenfällt. Dafs dabei zugleich die kürzeste Drehung gemeint ist, und nicht etwa eine konische, mag noch hinzugesetzt werden."

Junghans, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Berlin 1879.

p. 4: „Ein Winkel entsteht, wenn zwei gerade Linien von demselben Punkte ausgehen."

„Ein Winkel ist der ebene, nach einer Seite hin unbegrenzte Raum zwischen zwei beliebig langen geraden Linien, welche von demselben Punkte ausgehen. Er giebt die Gröfse der Abweichung an, welche zwischen den Richtungen der beiden Geraden stattfindet."

Korneck, Genetische Behandlung der Planimetrie. — Kempen 1879. (Progr. 125.)

p. 12: „Ein Winkel ist ein Teil der Ebene, welcher von zwei Strahlen begrenzt wird, die einen gemeinsamen Anfangspunkt haben."[1])

Leesekamp, Die Elemente der ebenen Geometrie. — Kassel 1879.

p. 6: „Den Richtungsunterschied zweier Strahlen mit gemeinschaftlichem Strahlenpunkte nennt man einen Winkel."

---

[1]) Einer solchen Definition in einer ausdrücklich als genetisch bezeichneten Planimetrie zu begegnen, ist eigentlich wunderbar.

„Ein Winkel kann dadurch entstanden gedacht werden, dafs ein Strahl um seinen Strahlenpunkt gedreht wird.“

„Der leichteren Vorstellung halber erklärt man auch den Winkel als die von den Schenkeln teilweise begrenzte Ebene.“

Mink, Lehrbuch der Geometrie. — Elberfeld 1879.

p. 5: „Ein Winkel ist ein Teil einer unbegrenzten Ebene, der durch zwei von einem Punkte ausgehenden Geraden unvollständig begrenzt wird.“

„Ein Winkel kann entweder gedacht werden, indem man sich vorstellt, der eine von den beiden Schenkeln sei festliegend und der andere werde von jenem aus durch Drehung um den Scheitelpunkt in seine Lage übergeführt. Je weiter diese Drehung fortgesetzt werden mufs, desto gröfser ist der Winkel. Es hängt daher die Gröfse eines Winkels nicht von der Länge der Schenkel, sondern von dem Mafse der Drehung oder von der Entfernung der beiden Schenkel ab.“

Schlegel, Geometrie. — Wolfenbüttel 1879.

p. 23: „Wenn ein Punkt auf einer Geraden seine Lage ändert, so wird die Gröfse der Bewegung durch die von dem Punkte zurückgelegte Strecke veranschaulicht und gemessen. — Wenn dagegen eine Gerade in einer Ebene sich bewegt, so kann die Gröfse der Bewegung nicht durch die Gröfse des Flächenstückes bestimmt werden, welches von der Geraden beschrieben wird. Denn dieses Flächenstück ist, wie die Gerade selbst, von unbestimmter (unendlicher) Gröfse.[1]) — Während aber die Gröfse der Verschiebung einer Geraden wenigstens durch die von einem ihrer Punkte zurückgelegte Strecke veranschaulicht oder gemessen werden kann, findet für die Gröfse der Drehung einer Geraden nichts ähnliches statt. In ihrer

---

[1]) Meines Erachtens macht das für die Vorstellbarkeit nichts aus. Es hätte also wohl gesagt werden können, dafs die Gröfse der Bewegung in dem Flächenstück (besser: Ebenenstück) veranschaulicht wird — allerdings nur insofern als man auf die begrenzenden Schenkel seine Aufmerksamkeit richtet, nicht auf die wirkliche Gröfse des Stückes: vielleicht könnte man von der Breite des Ebenenstückes sprechen.

Beurteilung mufs das Auge sich ebenso üben, wie in derjenigen der Bewegungsgröfse eines Punktes, wenn nur Anfangs- und Endstellung desselben, nicht aber die verbindende Gerade gegeben ist."[1])

„Die Drehungsgröfse zwischen zwei Geraden heifst ihr Winkel."[2])

(„Anm. Ein Schenkel des Winkels beschreibt bei einer Drehung einen Teil der Ebene.")

„Ebenso hat der Winkel (wie die Strecke) eine doppelte Bedeutung. Er ist erstens das Mafs für die Drehung einer Strecke in einer Ebene, zweitens, insofern man darunter das von den Schenkeln eingeschlossene Ebenenstück versteht, ein Teil der Ebene selbst."[3])

Schweder, Lehrbuch der Planimetrie. — Riga 1879.

p. 5: „Gehen von einem Punkte zwei verschiedene Gerade aus, so haben sie verschiedene Richtung und bilden einen Winkel. Ein Winkel ist die Abweichung der Richtungen zweier Geraden von einander."

„Die Gröfse des Winkels ist von der Länge seiner Schenkel unabhängig, und es kommt dabei nur auf die Verschiedenheit der Richtungen an. Von dieser erhält man am besten eine deutliche Vorstellung, wenn man sich den Winkel durch Drehung entstanden denkt."

Henrici und Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Leipzig 1881.

p. 10: „Ein zwischen zwei Halbstrahlen eines Punktes befindlicher (unvollständig begrenzter) Teil der Ebene heifst ein Winkel... Der Winkel giebt die Neigung oder den Richtungsunterschied der beiden Halbstrahlen an."

---

[1]) Was doch nicht schwer ist.

[2]) Warum weicht der Verfasser von der dualen Gegenüberstellung mit der Strecke ab? Dann wäre wohl das Resultat gewonnen worden: Die Drehungsgröfse wird gemessen etc. Man beachte die weiteren Auseinandersetzungen.

[3]) Ich glaube jetzt in meinen Ausführungen auf Seite 121 f. das wahre Verhältnis zwischen diesen beiden Bedeutungen klargelegt zu haben, indem ich die Vergleichung mit der Strecke konsequent durchführte.

„Ein Winkel kann aufgefaſst werden als durch Drehung eines Halbstrahles entstanden.“

Menger, Grundlehren der Geometrie. — Wien 1881.

p. 8: „Die unbegrenzte Ebene wird durch eine Gerade in zwei halbbegrenzte Ebenen (Halbebenen) geteilt; zwei parallele Gerade begrenzen einen Streifen (ein Band), zwei sich schneidende Gerade teilen die unbegrenzte Ebene in vier Winkel.

Ein ebener Winkel ist ein Teil der Ebene, der von zwei Strahlen begrenzt wird.“

„Dreht sich ein Strahl um seinen Anfangspunkt, so beschreibt er einen Winkel; man kann sich jeden Winkel durch Drehung eines Strahles entstanden denken.“

„Man betrachtet daher den Winkel als ein Maſs des Richtungsunterschiedes zweier Strahlen.“

Milinowski, Die Geometrie. — Leipzig 1881.

p. 1: „Das Maſs für den Richtungsunterschied zweier Geraden heiſst Winkel.“

„Ein Winkel entsteht auch, wenn eine Gerade sich um einen ihrer Punkte dreht; daher ist der Winkel das Maſs für die Drehung einer Geraden.“

Petersen, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Kopenhagen 1881.

p. 9: „Dreht sich eine Gerade um einen ihrer Punkte, bis sie wieder in ihre Anfangslage zurückkehrt, so sagt man, daſs sie eine ganze Umdrehung gemacht hat; dreht sie sich nicht um so viel, so bestimmt man ihre Lage dadurch, daſs man angiebt, einen wie groſsen Teil der ganzen Umdrehung sie zurückgelegt hat. Man sagt, daſs die Linie einen gewissen Winkel mit ihrer ursprünglichen Lage bildet, und der Winkel zwischen zwei Geraden ist also der Teil einer ganzen Umdrehung, den die eine Gerade zurücklegen muſs, um die andere zu decken.“

Ziegler, Grundrifs der ebenen Geometrie. — Landshut 1881.

p. 1: „Durch zwei auf einer Ebene sich schneidende Gerade entstehen vier Felder, welche Winkel heifsen.“

Féaux, Lehrbuch der elem. Planimetrie. — Paderborn 1882.

p. 10: „Die gegenseitige Lage zweier Linien führt zu der Vorstellung des Winkels. Unter Winkel versteht man nämlich den Unterschied der Richtung zweier Geraden.“

Es wird dann die Drehung erwähnt und es ist auch von einem Mafs der Drehung die Rede, das durch die Gröfse des Kreisbogens gegeben sei.

Heger, Leitfaden für den geometrischen Unterricht. — Breslau 1882.

p. 3: „Zwei in demselben Punkte einseitig begrenzte Gerade einer Ebene teilen die Ebene in zwei Felder, welche Winkel genannt werden.“

„Die Abweichung der Richtungen zweier sich schneidenden Geraden wird durch den Winkel gemessen, den die Geraden einschliefsen; je gröfser dieser Winkel ist, umsomehr sind die Richtungen verschieden.“

Kommerell-Fink, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Tübingen 1882.

p. 7: „Zwei Gerade teilen die Ebene in vier Teile, welche man Winkelräume oder kurz Winkel nennt; da jede Gerade eine Richtung bezeichnet, so ist ein Winkel der Richtungsunterschied zweier Geraden.“

Löser, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Weinheim 1882.

p. 11: „Zwei Strahlen, die von demselben Punkte ausgehen, teilen die Ebene, in welcher sie liegen, in zwei Teile. Jeder dieser Teile heifst ein Winkel.“

„Man erhält eine Vorstellung von der Gröfse eines Winkels, wenn man sich einen der beiden Schenkel in der Ebene, worin er liegt, um den Scheitelpunkt dreht oder stetig gedreht

denkt, bis er mit dem andern zusammenfällt; je gröſser die Drehung, desto gröſser ist der Winkel und umgekehrt."

J. K. Becker, Die Mathematik als Lehrgegenstand des Gymnasiums. — Berlin 1883.

p. 56: „..., so kann der Winkel und der Drehungsabstand zwischen seinen Schenkeln, damit zugleich der Kreis und dessen Benutzung zur Messung der Winkel angenommen werden."

Schindler, Die Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883.

p. 14: „Wenn die eine von den beiden sich schneidenden Geraden, durch welche die Ebene bestimmt ist, sich um einen ihrer Punkte dreht, so wird die Richtungsverschiedenheit zweier von dem festen Drehpunkte ausgehenden Richtungen durch entsprechende Drehung des Auges etc. wahrgenommen."

„Winkel heiſst die Richtungs-Verschiedenheit zweier von einem Punkte ausgehenden Richtungen."

„Der Winkel ist eine Drehungsgröſse."

Hoch, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Halle 1884.

p. 10: „Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, so wird die Gröſse der Bewegung durch die von dem Punkte zurückgelegte Strecke gemessen. ... Dreht sich eine Gerade um einen in ihr liegenden Punkt, so kann diese Drehung mit den bisher bekannten Bestimmungsstücken nicht gemessen werden, es muſs deshalb eine neue Gröſse eingeführt werden, welche bestimmt ist, Drehungen zu messen."

„Unter einem Winkel versteht man das Maſs der Drehung zwischen zwei Geraden."[1])

---

[1]) Völlig unsere Ansicht. Auch Hoch kommt zu diesem Resultat, indem er von den Betrachtungen bei der Strecke ausgeht und sie analog auf den Winkel überträgt. Ich benutze diese Gelegenheit, um noch darauf hinzuweisen, wie bei dieser Betrachtungsweise Strecke und Winkel zwar völlig analoge Resultate geben, aber doch insofern gegenüberstehen, als die eine ein Gebilde erster Stufe, der andere ein solches zweiter Stufe darstellt. Sie sind zugleich die beiden einzigen Elemente der geradlinigen Figuren, sodaſs sie, wenn man nur noch den Kreis hinzunimmt, das gesamte Material der Planimetrie darbieten.

„Denkt man sich die beiden Schenkel eines Winkels durch Fortbewegung eines Punktes entstanden (und zwar ist der Scheitelpunkt dann immer der Anfangspunkt), so giebt ein Winkel auch den Unterschied der Richtung an, welcher zwischen den Bewegungen eines Punktes längs der Schenkel stattfindet."

Kambly, Die Elementar-Mathematik. — Breslau 1884.

p. 5: Wenn man aus einem Punkte zwei gerade Linien (nach verschiedenen Richtungen) zieht, so entsteht ein geradliniger Winkel.

Ein geradliniger Winkel ist also der Richtungsunterschied (die Abweichung) zweier von einem Punkte ausgehenden geraden Linien."

„Dreht man den einen Schenkel um den Scheitel, bis er in die Richtung des anderen Schenkels fällt, so giebt diese Drehung die Gröfse der Abweichung der beiden Schenkel an."

Gaufs, Die Hauptsätze etc. I. — Bunzlau 1885.

p. 81: „Jede der beiden Teile, in welche die Ebene durch zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen zerlegt wird, heifst ein Winkel."

Koppe, Planimetrie. — Essen 1885.

p. 5: „Wenn man in einer unbegrenzten Ebene von einem beliebigen Punkte aus zwei Linien zieht und sich dieselben unbegrenzt fortlaufend denkt, so schneiden diese beide Linien von der unbegrenzten Ebene ein Stück aus, welches sich nach einer Seite hin ins Unendliche erstreckt, nach zwei Seiten aber durch die Linien begrenzt wird. Man nennt dasselbe einen Winkel."

„Ein Winkel entsteht durch Drehung eines Strahles um seinen Ausgangspunkt."

Recknagel, Ebene Geometrie. — München 1885.

p. 11: „Beschränkt man die Betrachtung auf zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen, so ist deutlich, dafs man den

einen derselben um ihren gemeinschaftlichen Ausgangspunkt drehen kann, bis er in die Lange des anderen kommt. Die Gröfse dieser Drehung heifst der Winkel, den die beiden Strahlen mit einander bilden."

„Der zwischen den Schenkeln eines Winkels enthaltene unbegrenzte Ausschnitt der Ebene heifst Winkelebene."

Stegmann, Die Grundlehren d. eb. Geometrie. — Kempten 1886.

p. 8: „Gehen von einem Punkte zwei Strahlen aus, so heifst die Gröfse der Drehung um den gemeinsamen Endpunkt, durch welche der eine Strahl in die Lage des anderen übergeführt wird, Winkel."

„Der Winkel giebt den Richtungsunterschied zweier Strahlen an."

F. Fischer, Anfangsgründe der Mathematik. II. — Leipzig 1887.

p. 10: „Zwei Strahlen AB und AC, welche von demselben Punkte A nach verschiedenen Richtungen auslaufen, bilden einen Winkel."

„Der Winkel mifst den Richtungsunterschied zwischen seinen beiden Schenkeln."

Lieber und von Lühmann, Planimetrie. — Berlin 1887.

p. 4: „Ein Winkel entsteht, wenn man von einem Punkte nach verschiedenen Richtungen hin gerade Linien zieht."

„Durch einen Winkel wird der Richtungsunterschied zweier von einem Punkte ausgehenden Geraden gemessen, d. h. er giebt an, um wie viel eine Gerade der Richtung nach von der anderen abweicht."

Rausenberger, Die Elementargeometrie. — Leipzig 1887.

p. 29: „Wir nennen nun ein aus zwei von einem Punkte ausgehenden Halbgeraden zusammengesetztes Gebilde, insofern

es durch eine Drehung bestimmter Art[1]) erzeugt ist, einen Winkel."

Es wird dann vom Vergleichen und Messen der Winkel gesprochen und auf die Analogie mit den Strecken hingewiesen.

p. 30: „Bemerkt zu werden verdient, dafs alle Winkelmessungen erst nach Einführung der Ebene einen Sinn haben, wenn auch das Winkelgebilde selbst von der Ebene unabhängig erscheint;[2]) denn das Addieren zweier Winkel durch Auseinanderlegen hat nur dann einen präzisen Sinn, wenn dabei die Winkel in dieselbe Ebene gebracht werden."[3])

Naturgemäfse Einheiten des Messens.

Seeger, Die Elemente der Geometrie. — Wismar 1887.

p. 8: „Zwei von einem Punkte auslaufende gerade Linien bilden einen Winkel."

„Einen Winkel kann man sich immer dadurch entstanden denken, dafs ein ursprünglich mit dem einen Schenkel zusammenfallender Halbstrahl sich um den Scheitelpunkt so lange gedreht hat, bis er in die Lage des anderen Schenkels gelangt ist, und nach der Gröfse der hierzu erforderlichen Drehung hat man die Gröfse des Winkels zu beurteilen."

Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie. — Braunschweig 1887. (Prog. 638.)

p. 30: „Zwei Halbstrahlen, welche in ihren Grenzpunkten zusammenstofsen, sollen in ihrer Vereinigung Winkelstrahl genannt werden."

p. 32: „Da ein Winkelstrahl stets eine Ebene bestimmt, so liegt es nahe, den Teil der Ebene, welcher durch den Win-

---

[1]) Nämlich die kürzeste Drehung.

[2]) Dann müfsten Streckenmessungen erst nach Einführung der Geraden Sinn haben und andererseits die Strecke von der Geraden unabhängig erscheinen. Es scheint doch, als ob der Zusammenhang zwischen Winkel und Ebene nicht genügend klar erfafst sei.

[3]) So, wie die Strecken in dieselbe Gerade gelegt werden müssen, wenn wir sie addieren wollen. — Die Addition mufs allerdings derartige Voraussetzungen machen, aber nicht die Vergleichung überhaupt.

kelstrahl begrenzt wird, in gewisser Weise auszuzeichnen: wir nennen denselben einen Winkel."

„Entstehung des Winkels durch Drehung eines Schenkels."

Beez, Über Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie. — Plauen 1888.

p. 11: „Nach der Definition der Ebene folgt bei Euklid die des Winkels: 'Ein geradliniger Winkel ist die Neigung zweier Geraden, die in einer Ebene in einem Punkte zusammentreffen.' Da der Winkel um so kleiner ist, je gröfser die Neigung, so würde der Begriff Neigung durch einen anderen z. B. Abweichung, welche mit dem Winkel ab- und zunimmt, zu ersetzen sein. Mit dieser Erklärung ist jedoch der Sprachgebrauch nicht allenthalben im Einklang. Man sagt z. B. ein Punkt liegt in einem Winkel, zwei Winkel lassen sich zur Deckung bringen, vier rechte Winkel erfüllen die Ebene und meint damit etwas Anderes als eine blofse Abweichung zweier Geraden.[1]) Der Ausdruck Winkel hat offenbar eine doppelte Bedeutung, zuerst die einer Raumgröfse, eines Ausschnittes aus der Ebene, der durch zwei in einem Punkte zusammentreffende Gerade gebildet wird und zweitens die in einer Lagenbeziehung zwischen denselben Geraden, von denen jede durch eine gewisse Drehung mit der anderen zur Deckung gebracht werden kann. Die Gröfse dieser Abweichung oder Drehung, durch welche sie zum Zusammenfallen gebracht werden können, wird ebenfalls Winkel genannt. Die Definition des Winkels als Unterschied zweier Richtungen ist eine unklare Bezeichnung für dieselbe Beziehung."[2])

Feld und Serf, Leitfaden für den geometrischen Unterricht. — Wiesbaden 1888.

p. 1: „Ein Winkel ist die Richtungsverschiedenheit[3]) zweier von einem Punkte ausgehenden Geraden."

---

[1]) Man vergleiche das Zitat aus Baltzers Elementen.

[2]) Diese letzte Bemerkung ist sehr treffend.

[3]) Dafs damit d. h. statt Unterschied Verschiedenheit zu setzen, nicht viel oder nichts gewonnen ist, habe ich gezeigt.

Reidt, Planimetrie. — Berlin 1888.

p. 5: „Gehen zwei Gerade (Strahlen) von einem gemeinschaftlichen Punkte aus, so heifst die Gröfse der Drehung um diesen Punkt, welche die eine Gerade machen mufs, um in die Lage der anderen zu gelangen, der Winkel dieser Geraden. Derselbe giebt die Neigung der beiden Strahlen zu einander oder, mit anderen Worten, den Unterschied ihrer Richtungen an."

Rottok, Lehrbuch der Planimetrie. — Leipzig 1888.

p. 3: „Dreht man eine nach einer Seite hin unbegrenzte gerade Linie um einen festen Punkt so in einer Ebene, dafs sie aus einer Richtung in eine andere gelangt, so nennt man die Gröfse der dabei vollbrachten Drehung Winkel."

„Die Gröfse eines Winkels ist unabhängig von der Länge seiner Schenkel, aber abhängig von dem Richtungsunterschiede derselben. Den Richtungsunterschied zweier Schenkel nennt man auch ihre Neigung zu einander. Ein Winkel ist daher auch das Mafs für die Neigung zweier Geraden zu einander."

Spitz, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Leipzig 1888.

p. 12: „Denkt man sich von zwei zusammenfallenden und sich in ihren Anfangspunkten deckenden Strahlen den einen um diesen Punkt stets in gleichem Sinne und in einerlei Ebene in irgend eine andere Lage gedreht, so nennt man die Gröfse der jedesmaligen Drehung den von den beiden Strahlen gebildeten Winkel."

Frankenbach, Lehrbuch der Mathematik. I. — Liegnitz 1889.

p. 10: „Nimmt man einen von zwei im Punkte O sich schneidenden Strahlen OA als festliegend an, so kann der zweite Strahl OB durch Drehung um den gemeinsamen Endpunkt O mit OA zur Deckung gebracht werden. Der hierbei von dem Strahl zurückgelegte Weg heifst Winkel."[1])

---

[1]) Man vergleiche, um sich Klarheit zu verschaffen, die betreffenden Betrachtungen bei zwei gegebenen Punkten. Man würde wohl auch

„Die Gröfse eines Winkels hängt von der Gröfse der Drehung, nicht aber von der Länge der Schenkel ab.“

„Die Schenkel eines Winkels bestimmen zwei verschiedene Richtungen; daher kann der Winkel als ein Mafs des Richtungsunterschiedes zweier Strahlen angesehen werden.“

Koch, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Ravensburg 1889.

p. 9: „Durch zwei Strahlen, die von einem Punkte ausgehen, wird ein Stück der Ebene abgegrenzt: der Winkel.“

„Dreht sich ein Strahl um seinen Anfangspunkt von einer ersten zu einer zweiten Lage, so durchläuft er einen Winkel.“

H. Müller, Über den ersten planimetrischen Unterricht. — Berlin 1889 (Progr. 68).

p. 15: „Ein Winkel ist ein von zwei Strahlen, die von einem Punkte ausgehen, begrenzter Teil der unendlichen Ebene.“

„Die Gröfse hängt nur davon ab, wie weit sich der zweite Schenkel vom ersten bei der Drehung um den gemeinsamen Punkt entfernt hat.“

Schram und Schüssler, Vorschule der Mathematik. — Wien 1889.

p. 125: „Unter dem Winkel zweier Geraden, die von einem Punkte ausgehen, versteht man die Gröfse der Drehung um diesen Punkt, durch welchen die eine Gerade in die Lage der andern gelangt.“

„Der durch die Drehung des einen Schenkels beschriebene Teil der Ebene heifst das Winkelblatt des Winkels.“

„Durch den Winkel wird der Richtungsunterschied zweier Geraden näher bestimmt.“

---

dort nicht sagen, der Weg, den der eine Punkt zurücklegt, heifst Strecke, sondern, der Weg kommt in der Strecke zur Anschauung, wird durch die Strecke gemessen. Danach ist der Ausdruck auch hier zu modifizieren.

Uth, Leitfaden der Planimetrie. — Kassel 1889.

p. 4: „Der Richtungsunterschied zweier Strahlen mit demselben Anfangspunkte, gemessen,[1]) heifst der Winkel, welchen die Strahlen miteinander bilden.“ „Der von den Schenkeln des Winkels begrenzte Teil der Ebene heifst Winkelfläche (Winkelfeld).“

Haller von Hallerstein, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. — Berlin 1890.

p. 5: „Dreht sich ein Strahl um seinen Endpunkt P aus seiner ursprünglichen Lage PA, so sagt man, der Strahl beschreibe einen Winkel; wenn er sich z. B. bis in die Lage PB gedreht hat, so hat er den Winkel APB beschrieben. Dieser Winkel ist um so gröfser, je weiter sich PA um P gedreht hat. Daher ist der Winkel das Mafs für die Drehung eines Strahles um seinen Endpunkt, d. h. er giebt die Gröfse der Drehung an, welche ein Strahl ausführen mufs, um in die Lage eines andern zu gelangen.“

Martus, Raumlehre I. — Bielefeld 1890.

p. 10: „Zieht man von einem Punkte aus zwei gerade Linien nach verschiedenen Richtungen, so entsteht ein Winkel.“

„Von der Verschiedenheit der Richtung des zweiten Schenkels gegen die des ersten hängt die Gröfse des Winkels ab.“

„Ein Zirkel, den man immer weiter öffnet, zeigt uns das Wachsen des Winkels mit zunehmender Richtungsänderung.“

Moroff, Das Winkelfeld. — Hof 1890. (Progr.)

Der Verfasser ist zu seiner Arbeit durch die Winkelartikel im 20. Jahrgange der Hoffmannschen Zeitschrift angeregt worden. Den vom Verfasser des vorliegenden Werkes her-

[1]) Womit oder wodurch? Wie ist es zu erklären, dafs etwas, wenn es gemessen wird — wobei es doch weder sein Wesen noch sonst irgend etwas ändert —, einen neuen Namen erhält? Denn nur darum würde es sich nach dieser Erklärung handeln. Was hätte es andererseits aber auch für einen Zweck, den Namen zu wechseln?

rührenden charakterisiert er mit der liebenswürdigen Wendung: „Und was ist es wieder für eine unglückliche, unselige Hand, welche die Frage einfädelt."[1])

p. 10: „Treffen sich die Geraden, schneiden sie sich, und zerfallen dabei in Halbgerade, so zerlegen sie im Verein die Ebene in vier völlig gesonderte Felder, in Winkel. Die Ausdehnung eines Winkels ist unendlich grofs und dabei vergleichbar mit der eines andern oder einer Halbebene beziehungsweise der ganzen Ebene."

Der Verfasser übersieht bei seinen Angriffen auf die Meinungen andrer, dafs es sich bei seiner Auffassung nicht um das einfache Unendliche handelt, sondern darum, dafs sich für $\infty : \infty$ ein bestimmter endlicher Wert angeben läfst. Ob aber derartige Betrachtungen für Schüler geeignet sind, dürfte billig bezweifelt werden. Hiermit sind auch des Verfassers gegen mich gerichteten Worte auf Seite 5 als hinfällig gekennzeichnet. So ganz ohne Überlegung, wie Hr. Moroff annimmt, pflege ich nicht zu arbeiten.[2])

Herm. Müller-Zwerger, Geometrie. — München 1890.

p. 3: „Unter einem Winkel versteht man das Mafs der stetigen Drehung, durch welche der eine von zwei sich schneidenden Strahlen in die Lage des andern gebracht wird." „Mafseinheit ist die volle Drehung."

Noack, Leitfaden der Elementar-Mathematik. — Berlin 1890.

p. 48: „Das Stück der Ebene, welches durch zwei vom nämlichen Punkte ausschneidende Strahlen unvollständig begrenzt wird, heifst ein Winkel."

Raschig, Erkenntnistheoretische Einleitung in die Geometrie. — Schneeberg 1890 (Progr. 537).

---

[1]) Ich habe weiter oben (Seite 112) Gelegenheit genommen, eine Besprechung der Moroffschen Abhandlung zu zitieren, deren Verfasser trotz dieser Worte sich für meine Definition ausspricht resp. dieselbe der Moroffschen vorzieht.

[2]) Man vergleiche auch meine Ausführungen auf Seite 112 u. 113.

p. 32: „An die vorstehenden Axiome (Gerade, S. 28) wird nun in einer Anzahl neuerer und einigen älteren Arbeiten auf diesem Gebiete bereits eine Definition des Winkels angeschlossen, insbesondere eine Kongruenzbedingung für Winkel ausgesprochen und — etwa unter ausdrücklicher Verwahrung dagegen, dafs man sich zwischen den Seiten etwas wie eine Fläche ausgespannt denke — das Axiom von der Geraden und Ebene abgeleitet."

Es werden dann Becker und Frischauf zitiert und eingewendet, „dafs aber mit der Starrheit und Festigkeit der Linien noch nicht die Starrheit und Festigkeit des Winkels als eines Raumgebildes gegeben, wenn nicht noch ein die Gröfse des Winkels bestimmendes Element hinzukommt. Dies kann zunächst nicht das übliche Winkelmafs sein, weil die Definition des Winkels, sowohl als Ausschnitt bez. als Teil der Ebene, welches die ursprüngliche, als auch als Drehungsgröfse, welches nur die aus jener durch das wissenschaftliche Bedürfnis hervorgegangene erweiterte Auffassung sein dürfte, beidemal der Ebene als Grundlage bedarf. So ist allein Baltzers Einwand gegen die oben erwähnte Darstellung zu verstehen, denn er sagt ausdrücklich, dafs man Winkel nicht vergleichen könne, bevor die Kongruenz ihrer Ebenen festgesetzt ist. Dies darf nicht ohne Einschränkung gesagt werden; richtig ist aber: Es kann der Winkel als eine selbständige Gröfse nicht definiert werden vor der Definition der Ebene."[1])

„Hiermit wird dem Rechnung getragen, dafs er indirekt definiert werden kann und dies zunächst durch ein Streckendreieck, in dem er eine gegen jene Strecken bestimmte Lage hat; die Bezeichnung „Winkel" wird hiermit streng genommen entbehrlich."

„Somit richtet sich unser Einwand ... gegen diejenige

---

[1]) Wie die Vorstellung der Strecke erst sekundär sich zu derjenigen der unendlichen Geraden erweitert, so dürfte wohl analog der Winkel als erzeugendes Element der Ebene aufgefafst werden können — unbeschadet der Auffassung von Gerade und Ebene als apriorischer Gebilde. Es handelt sich hier um verschiedene Gesichtspunkte, von denen man ausgeht.

Darstellung der Elemente, welche eine vorausgehende Definition des Winkels als einer selbständigen Gröfse für notwendig und möglich erachtet.“

Röse, Elementargeometrie. — Wismar 1890.

p. 2: „Zwei verschieden gerichtete Geraden in der Ebene haben bei gehöriger Verlängerung einen Punkt gemein, d. h. sie schneiden einander. Den Unterschied in den Richtungen zweier Ungleichlaufenden in der Ebene nennen wir Winkel.“

„Wenn eine gerade Linie in der Ebene sich so fortbewegt, dafs ein Punkt derselben in Ruhe bleibt, so hat diese Linie in jeder neuen Lage eine andere Richtung als in der ursprünglichen, und der Winkel wird immer gröfser, je weiter man die Drehung fortsetzt.“

Scholim, Lehrbuch der Geometrie. — Kreuzburg O.-S. 1890.

p. 7: „Wir haben gesehen, dafs man zwei Strahlen, welche von demselben Punkte ausgehen, durch Drehung zur Deckung bringen kann. Diese Drehung wird um so gröfser sein müssen, je weiter die beiden Strahlen ursprünglich von einander abgedreht waren. Diese Abdrehung nennt man den Winkel der beiden Strahlen.“

Simon, Die Elemente der Geometrie. — Strafsburg 1890.

p. 2: „Zwei sich schneidende Geraden teilen ihre Ebene in vier Teile, Winkel genannt. Jeder von ihnen ist das Stück der Ebene zwischen zwei Strahlen, welche vom selben Punkte ausgehen.“

p. 48: „Von den verschiedenen Erklärungen des Winkels ist diese die einzige, welche gestattet sich den Winkel als aus gleichartigen Teilen zusammengesetzt d. h. also als Gröfse zu denken. Die Erklärung ‚Winkel ist der Richtungsunterschied zweier Geraden‘ hat den Fehler, dafs sie von einem Unterschiede spricht, ohne die Gleichheit zu definieren, und die Gleichheit kann nur mittelst des Parallelenaxioms definiert werden, bezw. müssen Linien als gleichgerichtet angesehen

werden, wenn ihr Abstand unveränderlich ist; es ist auch nur schwer oder gar nicht verständlich, wie man einen Richtungsunterschied teilen kann.[1]) Richtung ist im gewöhnlichen Sinne nichts anderes als Geradlinigkeit, und die Erklärung lautet übersetzt: ‚Zwei sich schneidende Gerade sind zwei verschiedene Gerade,‘ wo sie dann zwar sehr richtig, aber doch wenig fruchtbar ist. Die schlechteste Erklärung ist wohl den Winkel als Drehungsgröfse zu definieren. Diese kehrt unlogischer Weise die Beziehung um; gleiche Drehungen können nur durch die Gleichheit der Winkel oder Bogen erkannt werden, aber nicht umgekehrt;[2]) sonst müfste man auch noch die Zeit zur Hülfe nehmen und sagen: Drehungen sind gleich, wenn sie bei gleichförmiger Bewegung in gleichen Zeiten ausgeführt werden, und bei der Definition der gleichförmigen Bewegung müfste man doch wieder auf die Gleichheit der Winkel oder Bogen zurückkommen. Was den Einwurf betrifft, dafs die hier gegebene Erklärung dem Schüler das Unendliche zumutet, so bemerke ich, dafs es sich nur um das Unendliche im Werden handelt und der Quartaner die Schwierigkeit, dafs das Unendliche im Werden ein Unendliches im Sein voraussetzt, durchaus nicht wahrnimmt; er geht über den Begriff des Unendlichen weg, wie der Reiter über den Bodensee.“[3])

E. Fischer, Die Geometrie. — Berlin 1891.

p. 3: „Gehen von einem Punkte zwei Gerade aus, so wird

---

[1]) Diese Bemerkung ist sehr treffend.

[2]) p. 2: „Ein Winkel kann wiedererzeugt werden dadurch, dafs der eine Schenkel oder Strahl sich in der Ebene um den Scheitel dreht, bis er in die Lage des andern kommt. Der Winkel dient zugleich als Mafs für die Drehungsgröfse.“

[3]) An anderer Stelle äufsert sich Simon: „Die allgemeinen Grundbegriffe: Körper, etc., wie die besonderen: Punkt, Gerade, Ebene (Abstand, Richtung, Winkel) sind Grenzbegriffe, welche sich im Laufe der Jahrtausende aus der sinnlichen Erfahrung entwickelt haben.“

„Der Grundbegriff Winkel wird am einwandfreiesten erklärt als Stück der Ebene zwischen zwei Strahlen, die von demselben Punkte ausgehen, d. h. also Grenze des Kreissektors bei über jedes Mafs wachsendem Radius.“

der Unterschied ihrer Richtungen als der Winkel bezeichnet, welchen sie mit einander bilden."

Auch auf die Drehung wird eingegangen, wobei eine dritte die Schenkel schneidende Gerade zu Hülfe genommen wird.

Hočevar, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1891.

p. 6: „Ein Winkel ist jener Teil der Ebene, welcher zwischen zwei von einem Punkte ausgehenden Halbstrahlen liegt."

Holl, Lehrbuch der Geometrie. — Stuttgart 1891.

p. 14: „Wenn zwei gerade Linien (Strahlen) von einem Punkte in verschiedener Richtung ausgehen, so sagt man, sie seien gegen einander geneigt und sie bilden einen Winkel."

„Ein Winkel ist der Richtungsunterschied (oder die Neigung) zweier Linien, die von einem Punkte ausgehen."

„Die Gröfse des Winkels hängt nicht von der Länge der Schenkel, sondern von der Richtung derselben (ihrer Neigung, Öffnung) ab und wird bestimmt durch die Gröfse des Bogens, welcher um den Scheitel als Mittelpunkt zwischen den Schenkeln beschrieben wird. Die Zahl der Grade etc. des Bogens ist zugleich Mafszahl für den Winkel, der dieselbe Anzahl von Graden etc. hat. Es ist hierbei gleichgültig, ob eine gröfsere oder kleinere Zirkelöffnung angewendet wird, da die in den Winkelraum fallenden Bogen immer gleich viele Grade haben."

H. Müller, Die Elementar-Planimetrie. — Berlin 1891.

p. 14: „Durch die Drehung eines Strahles um seinen Ausgangspunkt entsteht noch ein ebenes Gebilde. Ist PA die ursprüngliche Lage des Strahles und PB eine zweite, während der Bewegung eingenommene Lage, so wird durch die beiden Strahlen PA und PB die Ebene in zwei von einander getrennte Gebilde geteilt. Jeder dieser beiden Teile wird Winkel genannt."

„Erklärung. Ein Winkel ist ein Teil der Ebene, der durch zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen begrenzt wird."

„Da die Schenkel (die bestimmenden Strahlen) unbegrenzt sind, so ist jeder Winkel ein unbegrenzt grofses Flächenstück; es ist deshalb nicht möglich, die wirkliche Gröfse eines Winkels auszumessen.“

Dagegen ist Vergleichung von Winkeln mittelst Drehung möglich.

„Wenn auch die wirkliche Gröfse eines Winkels nicht bestimmt werden kann, so ist es doch möglich, auszumessen, welchen Teil der Ebene er beträgt.“[1])

Rofsmanith, Die Elemente der Geometrie. — Wien 1891.

p. 17: „Dreht man einen Halbstrahl SA um seinen Endpunkt S, so schliefst er in jeder seiner weiteren Lagen mit der Anfangslage einen Winkel ein. Derselbe wird um so gröfser, je weiter die Drehung fortgesetzt wird.“

„Der Winkel zweier Halbstrahlen, welche von einem Punkte ausgehen, kann somit als die Gröfse der Drehung betrachtet werden, welche erforderlich ist, um den einen derselben in die Lage des andern zu bringen.“

---

v. Schmidt, Euklids 11. Axiom. — Moskau 1891.

p. 16: „Zwei gerade Linien, die sich schneiden, haben nicht dieselbe, sondern verschiedene Richtung, was schon daraus hervorgeht, dafs sie zu ihrer Konstruktion, weil sie nicht zusammenfallen, zwei Ausdehnungen nötig haben. Der gröfsere oder geringere Unterschied ihrer Richtung gegen einander heifst Neigung oder Winkel.“

Fenkner, Ebene Geometrie. — Braunschweig 1892.

p. 6: „Gehen von einem gemeinschaftlichen Punkte zwei Halbstrahlen aus, so heifst die Gröfse der Drehung, welche einer der Halbstrahlen machen mufs, um in die Lage des andern zu kommen, der von den Halbstrahlen gebildete Winkel.“

---

[1]) Höchst bedenkliche Erklärungen, besonders in einem Schulbuch.

Hercher, Lehrbuch der Geometrie. — Leipzig 1893.

p. 5: „Man vergleicht zwei sich schneidende Gerade hinsichtlich ihrer Richtung, indem man die eine soweit um den Durchschnittspunkt dreht, bis sie mit der andern zusammenfällt. Die Drehung, welche eine Gerade machen mufs, um in die Lage einer andern zu kommen, ist das Mafs für den Richtungsunterschied der beiden Geraden. Der Richtungsunterschied von zwei sich schneidenden Geraden heifst der Winkel der beiden Geraden."

III. Kapitel.

Die Lehre vom Parallelismus.

Wer es heutzutage unternimmt, zur Parallelenfrage das Wort zu ergreifen, der mufs es in dem Bewufstsein thun, dafs es unmöglich ist, neues Material zur Lösung des Problems herbeizuschaffen. Aber der Zweck des vorliegenden Werkes setzt den Verfasser in die glückliche Lage, die Behandlung von einem andern, gewissermafsen neutralen Standpunkte aus in Angriff zu nehmen; es gilt ja nicht eine neue Darstellung, einen neuen „Versuch", wie deren so mannigfache vorliegen; es gilt das Vorhandene zu zergliedern, zu gruppieren und dadurch zu klarer Erkenntnis zu bringen, es gilt das reichlich vorhandene Material kritisch zu beleuchten und auf diese Weise einen gesicherten Stand gegenüber der Frage zu gewinnen, es gilt vor allem zu untersuchen, welche Behandlung der Parallelenlehre für die Schule sich als die beste ergeben dürfte.

Im 47. Bande von Grunerts Archiv (1867) stellt sich der Herausgeber eine ähnliche Aufgabe, wie sie uns hier vorliegt. Er beginnt seine Abhandlung „Ueber den neuesten Stand der Frage von der Theorie der Parallelen" mit den Worten (p. 307): „Seit den Zeiten des Euklides hat die Frage von der Theorie der Parallelen die Geometer, wenn auch teilweise mit längeren Unterbrechungen, doch immer wieder von Neuem lebhaft beschäftigt, viele Abhandlungen sind verfafst worden, in denen man diese Versuche gesammelt und einer eingehenden Kritik unterworfen hat. Schon

in einer im Jahre 1763 erschienenen verdienstlichen Schrift von Klügel[1]) sind achtundzwanzig mehr oder weniger von einander verschiedene Parallelentheorien gesammelt und beurteilt worden, und wer wollte alle die übrigen in den verschiedensten Sprachen und Ländern erschienenen Schriften ähnlicher Art aufzählen, die in den seit jener Zeit verflossenen hundert Jahren verfafst worden sind."

In der That, das vorliegende Material ist ein ungeheures! Hier Vollständigkeit auch nur einigermafsen zu bieten, würde ein Studium für sich allein bedingen, nun gar, wenn man das Neueste, was hierher gehört, mit in die Frage hineinziehen wollte. Und doch, ganz läfst es sich nicht vermeiden, und wir werden hier und da genötigt sein, diese neuesten Untersuchungen wenigstens zu streifen, bei welcher Gelegenheit zur Vervollständigung auf die wichtigsten litterarischen Erscheinungen dieser Art hingewiesen werden wird.

Schon im § 3 des ersten Kapitels wurde bei der Betrachtung der Lagen zweier Geraden das hier zu behandelnde Thema berührt: als ersten Fall zweier Geraden nahmen wir den, dafs die beiden Geraden keinen Punkt gemeinsam hatten und setzten fest, dafs solche Gerade Parallelen genannt würden.

Hier wollen wir einen andern Ausgangspunkt für unsere Untersuchungen wählen, indem wir zuerst von einem allgemeineren Gesichtspunkte ausgehen und eine Definition eines allgemeinen Begriffs des Parallelismus versuchen. So viel ist wohl von vornherein klar, dafs wir Parallelismus auch im allgemeinern Sinne auf Flächen und Linien einzuschränken haben, von parallelen Körpern zu sprechen würde widersinnig erscheinen.

Es fragt sich nun, wovon wir bei diesen allgemeinen Betrachtungen auszugehen haben, resp. welche Idee wir zu Grunde legen müssen. Offenbar kommen zwei der gebräuchlichsten

---

[1]) Zu meinem Bedauern habe ich die Schrift selbst nicht einsehen können. Bei dem Mangel jeglicher öffentlichen Bibliothek an hiesigem Orte und bei den Weitläufigkeiten, die beim Verkehr mit auswärtigen Bibliotheken erwachsen, war es mir nicht mehr möglich, die genannte Schrift selbst zu benutzen.

Definitionen für parallele Gerade sofort aufser Berücksichtigung: weder können wir das Nichtgemeinsamhaben von Punkten als entscheidendes Merkmal benutzen[1]) noch die Definition von der „gleichen Richtung“ her ableiten. Das erstere würde die wirkliche Parallelität nur als einen Spezialfall enthalten, die zweite Erklärung keinen Sinn haben, wenn nicht schon die Definition paralleler Geraden vorangegangen wäre. Es würde also als das einzig Brauchbare für den allgemeineren Begriff des Parallelismus von Flächen und Linien nur übrig bleiben das Merkmal des konstanten Abstandes. Nach vielfältiger Erwägung und Prüfung scheint mir die folgende Definition einwandsfrei zu sein: Liegen zwei Raumgebilde — Flächen resp. Linien[2]) — so, dafs je zwei gegenseitige Nachbarpunkte konstanten Abstand von einander haben, so heifsen die beiden Gebilde parallel.[3])

Die Prüfung an besondern Fällen hat mir wenigstens keinen widersprechenden Fall ergeben. Nehmen wir z. B. eine Ebene und eine Gerade, so ist die Richtigkeit der Definition anschaulich evident, es leuchtet aber auch ein, dafs wir ausdrücklich von „gegenseitigen Nachbarpunkten“ sprechen müssen. Nimmt man nämlich einen beliebigen Punkt in der Ebene an und denkt sich den zugehörigen Nachbarpunkt auf der Geraden, so ist natürlich nicht vice versa auch der beliebig gewählte Punkt der Ebene notwendig der Nachbarpunkt des betreffenden Punktes auf der Geraden: zu jedem Punkte der Ebene gehört ein ganz bestimmter Nachbarpunkt auf der Geraden, aber es

---

[1]) Ja selbst für Gerade gilt diese Definition ja nur in der Ebene, nicht allgemein im Raume.

[2]) Und zwar sowohl Fläche und Fläche, als Fläche und Linie, als Linie und Linie.

[3]) Magnus giebt in seiner „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie“, Berlin 1883, p. 427, folgende Definition: „Einer Kurve BCD ist eine andere Kurve $B'C'D'$ parallel, wenn diejenigen Stücke BB', CC', DD' u. s. w. der an jener Kurve gezognen Normalen, welche zwischen beiden Kurven liegen, sämtlich einander gleich sind.“ Daran schliefst sich die Entwickelung einer Reihe interessanter Sätze, die das Wesen der parallelen Kurven völlig zur Klarheit bringen. — Mir scheint die Definition mit der meinigen im wesentlichen identisch.

giebt unzählig viele Punkte auf der Ebene, die denselben Punkt der Geraden zum Nachbarpunkt haben — und zwar ist der Träger dieser Punktreihe eine Gerade —; dagegen zu jedem Punkte der Geraden giebt es nur einen Nachbarpunkt auf der Ebene und jedem einzelnen Punkte der Geraden entspricht ein ganz bestimmter Punkt der Ebene als Nachbarpunkt. Es giebt nicht mehrere Punkte auf der Geraden — wie vorher in der Ebene —, die denselben Punkt der Ebene zum Nachbarpunkt hätten. Diese beiden letzteren, eindeutig bestimmten zugehörigen Nachbarpunkte sind diejenigen, die als „gegenseitige Nachbarpunkte" bezeichnet worden sind. Die Richtigkeit der aufgestellten Definition ist in dem gewählten Beispiel anschaulich evident. Es wird übrigens nicht überflüssig sein, darauf hinzuweisen, dafs nach unserer Definition zwei beliebige ebene Kurven, deren Ebenen zu einander parallel sind, deshalb noch nicht selbst parallel zu sein brauchen, was mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauch übereinstimmt.[1])

Als andres Beispiel sei erwähnt:

Konzentrische Kugelschalen fallen unter unsre Definition und sind demnach als parallel zu bezeichnen.

Gehen wir nun ohne weiteres zu den Linien über, so können wir unsere Untersuchungen unter drei Gesichtspunkten anfassen, wir können nämlich betrachten zwei Linien

1) im Raume,
2) auf Flächen, a. verschiedenen, b. derselben,
3) speziell, a. in zwei Ebenen oder b. in ein und derselben Ebene.

Bei der Erörterung dieser verschiednen möglichen Fälle[2]) würden z. B. unter 2) b. die Parallelkreise auf der Kugel zu besprechen sein oder auf einem Zylinder oder einem Kegel. Der wichtigste Fall ist natürlich 3) b., da wir uns hier

---

[1]) Überhaupt wird sich ergeben, dafs Parallelsein im Sinne unsrer Erklärung nur vorkommen kann bei gleichartigen Raumgebilden derselben Stufe, mit alleiniger Ausnahme davon, dafs Gerade und Ebene parallel sein können.

[2]) Hierbei ist wohl zu beachten, dafs auch schon bei der Erörterung des Falles 1) die spezielle Annahme, dafs die beiden Linien Geraden sind, in Betracht gezogen werden mufs.

unserm eigentlichen Ziele schon wesentlich nähern. Ein hierhergehörendes Beispiel würden zwei konzentrische Kreise sein. Schliefslich wäre die Untersuchung auf Geraden zu spezialisieren und hier ebenfalls wieder wie vorhin die verschiedenen Möglichkeiten in Erwägung zu ziehen.[1]) Als speziellster Fall ergäbe sich zum Schlufs derjenige unsrer gewöhnlichen Parallelen.

Es ist natürlich, dafs eine solche allgemeine Betrachtung nicht in die Schule gehört, wenigstens nicht in den Anfang des planimetrischen Uuterrichts, da wo zuerst von Parallelen die Rede ist. Mir schien es aber von Wichtigkeit, durch diese Verallgemeinerung den wesentlichen Kern herauszuschälen, das eigentlich charakteristische Merkmal für den Parallelismus darzulegen.[2]) Wer den vorliegenden Erörterungen einige Bedeutung beilegt, wird mit uns zu dem Resultat kommen, dafs die Konstanz des Abstandes als das wesentliche Merkmal des Parallelismus aufzufassen ist, und dafs deshalb die Definition hierauf sich zu stützen hat. Von methodischer Seite steht dem auch nicht das geringste im Wege.

Wenn man die verschiedensten Werke auf ihre Definition der Parallelen — und die daraus resultierende Behandlung der Parallelenlehre — ansieht (die beigefügten Zitate werden dem Leser die Möglichkeit hierzu gewähren), so zeigen sich im wesentlichen drei Arten der Auffassung:

---

[1]) Selbstverständlich können dann im Fall 2) nur Regelflächen in Betracht kommen. Hier ist es nun interessant, dafs bei 2) b. die Existenz solcher Geraden zur Unmöglichkeit werden kann, die bei 2) a. vorkommen.

[2]) Die Berechtigung zu einer derartigen Verallgemeinerung liegt meines Erachtens darin, dafs man eine teilweise Verallgemeinerung schon in den Parallelkreisen einer Kugel ganz allgemein als richtig anerkannt hat. Auch in diesem Beispiele ist übrigens die Konstanz des Abstandes der Nachbarpunkte — mag man den Abstand im absoluten Sinne räumlich auffassen oder in eingeschränktem Sinne Abstand auf der Kegelfläche — das wesentliche Merkmal. Kreise, die keinen Punkt gemeinsam haben, giebt es auf der Kugel, ohne dafs sie deshalb parallel zu sein brauchen, und die Verwendung des Begriffs der Richtung würde doch zu weitläufigen und nicht ganz leichten Erörterungen führen. Man vergl. den weiter unten näher zu besprechenden Aufsatz in Grunerts Archiv XV, p. 361.

1) Die Geraden haben keinen Punkt gemeinsam; hierbei sind zugleich diejenigen Definitionen zu erörtern, die das Nichtschneiden zu Grunde legen oder die Geraden sich im Unendlichen schneiden lassen. Die letztere Erklärungsweise führt uns hinüber zu

2) Die Geraden haben „gleiche Richtung“ oder „gleiche Richtungen“, wozu auch diejenigen Erklärungen gehören, die eine Transversale und die Gleichheit der Schnittwinkel zu Hülfe nehmen.

3) Die Geraden haben konstanten Abstand, eine Erklärung, die viel Verwandtes mit No. 1 hat, zu ihr wieder zurückführt und so den Zirkel der Erklärungen schliefst.

Des Weiteren ist dann der Versuch zu besprechen, die Parallele als den geometrischen Ort zu erklären aller Punkte, die von einer Geraden gleichen Abstand haben.

Daran wird sich schliefslich die Besprechung der Versuche anreihen, das Problem dadurch zu lösen, dafs andere gleichwertige an seiner Stelle erörtert werden, wie z. B. die Winkelsumme im Dreieck beträgt zwei Rechte.

Da die Zitate auch bei diesem Kapitel historisch geordnet sind, so ist dadurch die Möglichkeit geboten, einen Überblick über die historische Entwicklung zu gewinnen und zu erkennen, welche der Erklärungen zeitweilig die Herrschaft gehabt hat.[1])

Die drei hauptsächlich von einander verschiedenen Definitionen der parallelen Linien stehen nicht soweit von einander ab ihrem Wesen nach, wie dies z. B. bei den drei gebräuchlichsten Winkeldefinitionen der Fall ist. Ich habe schon darauf hingedeutet, will aber der gröfseren Klarheit wegen noch einmal den Zusammenhang deutlich hervorheben.

Das „keinen Punkt gemeinsam haben“ führte, weil es nicht befriedigte, hinüber zu dem „einen Punkt im Unendlichen

---

[1]) Hier liefsen sich vielleicht lehrreiche Betrachtungen über den „Geschmack in der Mathematik“ anstellen, wie sie von anderem Gesichtspunkte aus Engel in seiner Antrittsvorlesung „der Geschmack in der neueren Mathematik“ geboten hat. Allerdings würde sich bei dieser Auffassung Geschmack und Mode nahezu decken, womit im allgemeinen vielleicht nicht Jedermann einverstanden sein dürfte.

gemeinsam haben" — resp. war es der Einflufs der modernen Geometrie, der die verschiedenen Fälle unter einheitlichem Gesichtspunkte ordnete —; diese letztere Erklärungsweise wiederum zeigte sich identisch mit der „gleiche Richtung (Richtungen) haben". Andererseits kam man von der ersten Erklärung dazu, den „konstanten Abstand" ins Auge zu fassen, da nach unserem natürlichen Denken zwei Gerade, die keinen Punkt gemeinsam haben, sich nicht nähern können, weil sie sonst schliefslich einen Punkt gemeinsam haben würden: also immer gleichweit von einander entfernt sein müssen. Es wird sich daher bei der Besprechung der drei Erklärungen nicht umgehen lassen, hier und da von dem einen in das andere Gebiet hinüberzugreifen.

1) Die Geraden haben keinen Punkt gemeinsam
oder sie schneiden sich nicht
oder sie treffen sich im Unendlichen
oder sie haben im Unendlichen einen Punkt gemeinsam.

Zunächst möchte ich gegen die letztere Ausdrucksweise Einwendungen erheben. Abgesehen davon, dafs das Unendliche unnützerweise in die Erörterung hineingezogen wird, ist doch andererseits die Erklärung deshalb zu verwerfen, weil sie etwas bestimmtes aussagt, ohne dafs wir durch unsere Anschauung oder sonst woher irgendwelche Aufklärung resp. Erkenntnis davon gewonnen hätten.[1]) Woher wissen wir denn, dafs die Geraden sich im Unendlichen schneiden resp. treffen resp. dort einen Punkt gemeinsam haben? Die Ausdrucksweise ist aus Zweckmäfsigkeitsgründen zu gunsten einer einheitlichen Auffassung der Lage zweier Geraden geschaffen worden ohne jede innere Berechtigung. Die höhere Geometrie hat sich der Freiheiten der Auffassung bedient, deren sie sich ohne weiteres bedienen darf, nicht aber dürfen wir derartige Betrachtungen direkt in die elementare Planimetrie hineintragen.

Wenn Gauss in einem Brief an Schumacher sagt: „Der endliche Mensch darf sich nicht vermessen, etwas Unendliches

---

[1]) Man vergleiche H. Z. VII, p. 469, f. (aber auch H. Z. VIII, p. 220, f.).

als etwas von ihm mit seiner gewohnten Anschauung zu Umspannendes betrachten zu wollen", so gilt das ganz speziell im vorliegenden Falle. Wir können darüber, wie die beiden Geraden sich zu einander im Unendlichen verhalten, gar nichts aussagen, weder dafs sie sich schneiden, noch dafs sie sich nicht schneiden — obwohl uns das letztere wegen seiner Analogie mit dem Endlichen, mit dem unserer Anschauung Zugänglichen als das Natürlichere erscheinen mufs. Der „unendlich ferne" Punkt[1]) also, den zwei Gerade gemeinsam haben, ist lediglich ein Wort, ein leerer Begriff, da ihm in der Anschauung nichts entspricht.[2]) Aus diesen Gründen

[1]) Der Ausdruck „unendlich entfernter" Punkt findet sich bei Steiner, Systematische Entwicklung etc. Kap. 1, § 2. — Aber schon Desargues 1630 und Newton 1687 haben seiner Erwähnung gethan.

[2]) Bei Steiner l. c. heifst es (ich zitiere nach Steiner, Gesammelte Werke, Bd. I, p. 240, f.): „Man lasse den Strahl p ... sich bewegen, so wird der Punkt 𝔭 die Gerade so durchlaufen, dafs er nacheinander in die Stellen 𝔡, 𝔞, 𝔣, 𝔮, 𝔥, 𝔠, 𝔟 gelangt und folglich sich stets nach einer und derselben Richtung hin bewegt. Nur in der einzigen besonderen Lage des Strahles, wo er nämlich mit der Geraden A parallel ist, welches etwa bei 𝔮 der Fall sein mag, findet **kein wirkliches Schneiden** desselben mit der Geraden statt; da aber sowohl vor als nach dieser Lage stets ein wirkliches Schneiden stattfindet, und zwar, da der unmittelbar vorhergehende Durchschnitt in der gröfstmöglichsten Ferne auf der Seite über 𝔥 hinaus, und der unmittelbar nachfolgende Durchschnitt in der gröfstmöglichsten Ferne auf der anderen Seite über 𝔣 hinaus liegt, so soll in der Folge der Übereinstimmung wegen gesagt werden, der Strahl q sei nach dem unendlich entfernten Punkte der Geraden A gerichtet, und es soll dieser unendlich entfernte Punkt, wenngleich derselbe in der Figur nicht wirklich anzutreffen ist, durch 𝔮 bezeichnet werden. Demnach hätte die Gerade A nur einen unendlich entfernten Punkt 𝔮, und man kann sich denselben sowohl nach der einen Seite (über 𝔥 hinaus) als nach der andern (über 𝔣 hinaus) hin liegend vorstellen. Auch folgt hiernach, dafs umgekehrt ein Strahl, der nach dem unendlich entfernten Punkte der Geraden A gerichtet ist, notwendigerweise mit ihr parallel sein mufs." Ich mache noch besonders darauf aufmerksam, dafs Steiner sagt, dafs die Parallele nach dem unendlich entfernten Punkte **gerichtet** ist, nicht etwa dafs sie ihn treffe oder mit der Geraden gemein habe; ja er schliefst dies durch seine Betrachtungen geradezu aus. Mir scheint, als sei die Darstellung Steiners an dieser Stelle nicht mit genügender Schärfe beachtet worden.

möchte ich gegen den Gebrauch der vorliegenden Parallelendefinition im Schulunterricht sein. Der Schüler wird die Erklärung, die Geraden haben keinen Punkt gemeinsam, völlig verständlich finden, das Hereinziehen des Unendlichen kann nur dazu dienen ihn verwirrt zu machen, wenn man dort plötzlich etwas anderes annimmt als im Endlichen.[1])

Um den erörterten Skrupeln zu entgehen, haben viele Verfasser Ausdrücke gewählt wie die folgenden: „Die Geraden haben keinen Punkt gemeinsam, so weit man sie auch verlängern mag“ oder „Die Geraden haben im Endlichen keinen Punkt gemeinsam“, Ausdrücke, gegen die sich nichts einwenden läfst, die aber auch keinen wesentlichen Vorzug verdienen vor dem einfachen „Die Geraden haben keinen Punkt gemeinsam“.

Die vorliegende Erklärung der Parallellinien läfst sich nun auf das natürlichste mit der dritten verknüpfen, denn es ist evident, dafs zwei Gerade, die keinen Punkt gemeinsam haben, sich nicht einander nähern dürfen, sondern immer — d. h. soweit sie unserer Anschauung resp. unserem anschaulichen Vorstellen zugänglich sind — gleichen Abstand von einander haben müssen. Alle Nachbarpunkte haben gleichen Abstand und somit kann man auch davon sprechen, dafs die Geraden selbst einen Abstand haben, nämlich den konstanten der Nachbarpunkte. Hier ist ein wesentlicher Unterschied mit zwei Geraden, die einen Punkt gemeinsam haben. Bestimmen wir nämlich bei zwei sich schneidenden Geraden zu einem beliebigen Punkte auf der einen Geraden den Nachbarpunkt auf der anderen, so ist nicht umgekehrt auch der erstere der Nachbarpunkt des zweiten, während dieser Fall eintritt bei parallelen Geraden.[2])

---

[1]) Ganz analog wie bei der Zahlenreihe: auch hier kann immer wieder 1 addiert und dadurch eine neue Zahl gewonnen werden, die für unser anschauliches Denken eine Zahl wie die frühere ist, d. h. eine endliche; erst wenn dieser Prozefs über jede Vorstellung hinaus fortgesetzt wird, gelangen wir zum Unendlichen als etwas Unvorstellbarem: so weit wir die beiden Geraden anschaulich verfolgen können, haben sie keinen Punkt gemeinsam, geht aber ihre Verlängerung über alles Vorstellen hinaus, so fehlt uns auch jede Vorstellung davon, ob sie einen Punkt gemeinsam haben oder nicht.

[2]) Man könnte hierauf sogar eine Definition der Parallelen gründen: „Ist bei zwei Geraden ein Punkt Nachbarpunkt seines Nachbarpunktes,

Kehren wir zu dem ersteren Gedanken zurück, so ist als ganz sicher festzusetzen, dafs wir in unserem anschaulichen Denken mit dem Ausschliefsen eines gemeinsamen Punktes der zwei Geraden die Konstanz des Abstandes eo ipso (gemäfs den Gesetzen unseres Denkens) verbinden. Es ist nicht denkbar, dafs der Abstand sich verkleinere oder vergröfsere, ohne dafs wir zugleich ein Näherkommen oder ein Weiterabweichen der beiden Geraden uns dabei vorstellen und mit dieser Vorstellung ist diejenige eines gemeinsamen Punktes wiederum untrennbar verbunden.

Von hierzugehörigen Aufsätzen ist es zunächst einer von Sturm „Die neuere Geometrie auf der Schule" in Hoffmanns Zeitschrift, Bd. I, p. 474—490, der für die hier behandelte Frage von Wichtigkeit ist. Er ist geschrieben mit besonderer Rücksicht auf Geisers bekannte „Einleitung in die synthetische Geometrie". p. 478 heifst es: „Mit hohem Interesse habe ich die schöne, so vorsichtig einschränkende Art und Weise kennen gelernt, wie der Verfasser die gewöhnlich grofse Schwierigkeiten bereitenden transcendenten Gebilde — den unendlich entfernten Punkt etc. — als notwendige Konsequenzen gewisser allgemeiner Sätze ableitet.[1]) Wenn bei den Definitionen der parallelen Geraden (als solcher Geraden derselben Ebene, welche sich in einem nicht erreichbaren Punkte treffen....) auf diese Gebilde hingearbeitet wird, so werden dieselben vielleicht der Einführung in den Schulunterricht nicht so erhebliche Schwierigkeiten darbieten: der Versuch wenigstens mufs mehrfach gemacht und es darf nicht von vornherein darüber abgesprochen werden."

Auf den Einwurf der Redaktion, dafs „in einem unerreichbaren Punkte treffen" eine contradictio in adjecto und gleichbedeutend mit „gar nicht treffen" sei, erwidert Sturm: „Nur gegen eins mufs ich mich unbedingt erheben, gegen die Abfertigung der Parallelentheorie. Das einzige

---

so gilt dies für alle Punktepaare oder so haben die beiden Geraden konstanten Abstand oder so sind die Geraden parallel."

[1]) Man vergl. das Zitat aus Steiner selbst; uns sagt dessen Darstellung weit mehr zu, als die Geiser'sche.

Wort, das darin von mir herrührt, ist „unerreichbar" statt „unendlich entfernt"; die Anschauung selbst ist jetzt Gemeingut aller produktiven Geometer."

Sturm gesteht zu, selbst die gröfsten Schwierigkeiten bei dieser Vorstellung gehabt zu haben, hebt aber dagegen ihre Vorteile hervor und meint, dafs sie vorsichtig gebraucht nie zu einem Irrtume führe. Das Wort „unerreichbar" solle nur als Übergangswort zu „unendlich entfernt" dienen. Er sagt dann: „Aber auch bei diesem Worte mufs ich gegen die contradictio in adjecto protestieren; dieselbe fände doch nur statt, wenn die treffenden zugleich die erreichen sollenden wären, was eben nicht der Fall ist. Die sich treffenden sind die beiden unendlich langen geraden Linien, die erreichen sollenden sind wir Menschen. Sie geben doch wohl zu, dafs jede einzelne Linie für uns unerreichbare Punkte hat, warum können zwei Linien nicht einen dieser unerreichbaren Punkte gemein haben? In diesem würden sie sich dann auch treffen." „Der Einwand der sich stets gleich bleibenden Entfernung läfst sich doch sehr leicht für den, der mit unendlicher Gröfse zu operieren versteht, durch die Bemerkung widerlegen, dafs in der Unendlichkeit diese endliche Distanz verschwindet."[1])

Hierzu möchten wir zunächst bemerken, dafs allerdings nichts dagegen spricht, dafs zwei Gerade einen Punkt im Unendlichen (Unerreichbaren) gemeinsam haben können, aber ebensowenig dafür, dafs sie einen solchen Punkt in der That gemeinsam haben müssen oder haben.[2]) Was dann das Verschwinden der endlichen Distanz im Unendlichen betrifft, so

---

[1]) Auf diesen Punkt werden wir bei der Besprechung eines weiteren Aufsatzes von Sturm noch zurückkommen.

[2]) „Gerade Linien sind parallel, wenn sie sich im Endlichen nicht schneiden. Man ist nicht befugt, die Negation vom Verbum wegzunehmen und mit dem Begriffe endlich zu verschmelzen. Müssen denn zwei Linien, welche sich im Endlichen nicht schneiden, sich im Unendlichen schneiden? Kann im Unendlichen nicht dasselbe stattfinden, wie im Endlichen? Könnten die beiden Geraden im Unendlichen nicht zusammenfallen? Wäre auf alle Fälle nicht mit dem Schnitt- oder Treffpunkte im Unendlichen das Unendliche fixiert?"

Zerlang in H. Z. Bd. III. p. 265.

würde ich die Schüler beklagen, denen man am Anfang des planimetrischen Unterrichts den Kopf mit derartigen mathematisch-philosophischen Abstraktionen anfüllte.[1]) Man würde ihnen damit eine völlig unverdauliche Speise vorsetzen, an der sie sich sehr leicht für alle Zeit gründlich den Geschmack an der Geometrie verderben würden. Dem jugendlichen Geist mufs man anschaulich kommen.[2])

Im übrigen enthält der fragliche Artikel sehr viel Gutes und Beherzigenswertes. Seine ausführlicher zitierten Stellen haben nun eine Reihe von Entgegnungen gezeitigt, die wir ebenfalls einer genaueren Betrachtung würdigen müssen.

An erster Stelle repliziert Kober im selben Bande der H. Z. p. 491 in seinem Artikel „Ueber die Definition des Parallelismus". Dort heifst es:

„Mit den Worten „erreichbar" oder „unerreichbar" meint er ohne Zweifel, nicht was dem physischen Menschen oder dem sinnlichen Auge, sondern was dem denkenden Verstande erreichbar oder unerreichbar ist. Trotzdem behauptet der Verfasser, dafs dieser unerreichbare Punkt wirklich existiere, und beruft sich dabei auf die Auffassung der höheren Geometrie."

„Den Gegensatz zwischen „parallel" und „schneidend" macht aber nicht die niedere Geometrie, d. h. der oder jener Geometer, sondern der allgemein menschliche Verstand. Es handelt sich nicht um eine willkürliche Definition, sondern um die im menschlichen Verstande vorhandenen Begriffe. Die Frage ist, ob Linien denkbar sind, die selbst im Unendlichen nicht zusammentreffen, sondern stets in gleicher Richtung oder gleicher Entfernung neben einander herlaufen ..... Sie sind denkbar, trotzdem dafs sie die Methode der höheren Mathe-

---

[1]) Übrigens giebt es doch noch genug Mathematiker, die $\infty + a = \infty$ ein „bedenkliches Prinzip" nennen.

[2]) „Wer die Parallelentheorie mit dem unendlich fernen Punkte einleitet, begeht den Fehler, den Schüler von seiner gewohnten Anschauung und seinem natürlichen Denken zu entfernen. In Folge solcher Fehler glaubt der Schüler endlich, dafs die Wissenschaft zu seiner bisherigen Erkenntnis im Gegensatze stehe und wird irre an sich selbst."

J. Kober, „Ueber das Unendliche und die neuere Geometrie" in H. Z. III. p. 261.

matik nicht brauchen und nicht behandeln kann, sondern sie vorkommenden Falls als wirklich, wenn auch im Unendlichen, zusammentreffend behandelt. Ob solche Linien in der Natur, im Weltall, vorkommen, ist völlig gleichgültig; es existiert ja überhaupt keine gerade Linie .... in der äufseren Wirklichkeit, sondern nur in unserm Denken, Denken wir uns eine Eisenbahn ins Unendliche hinausgebaut, so wird doch Niemand sagen wollen, dafs die Schienen, wenn auch im Unendlichen, je zusammentreffen würden? dafs also die Lokomotive auf ihnen nicht mehr würde stehen können? Hierin läge in der That eine contradictio in adjecto. Ob unser sinnliches Auge die Lokomotive als einen Punkt oder gar nicht sieht, hat damit nicht im Mindesten zu thun.“

Auch die weiteren Einwendungen Kober's gegen Sturm verdienen alle Beachtung, vor allen Dingen, wenn er sagt, auf Wahrheit kommt es an, nicht auf ein methodisches Prinzip.

Ebenfalls gegen Sturm wendet sich J. C. Becker in H. Z. Bd. II. p. 89. Er sagt:

„Ich gebe zwar zu, dafs die Geometrie der Lage berechtigt ist, von dem unendlich fernen Punkte einer Geraden zu sprechen und zwei Parallele als Linien zu definieren, die diesen Punkt gemein haben .... Aber darum ist der „unendlich ferne Punkt“ doch nur — eine blofse Fiktion[1]), und ebenso wenig reell, wie die imaginären Schnittpunkte zweier Kurven, die sich wirklich schneiden.“

Becker weist dann nach, wie man zu dieser Fiktion gekommen, worüber wir bei der zweiten Definition zu sprechen haben werden, und führt an, dafs Reye die unendlich entfernten Elemente der Raumgebilde als „uneigentliche Elemente“ bezeichne. Man müsse sich davor hüten, durch die Fiktionen der höheren Mathematik die Grundbegriffe der Elemente sich trüben zu lassen.

Becker selbst will die Definition des Parallelismus auf den Begriff der Stellung stützen.

---

[1]) Ganz im Sinne Steiner's, gemäfs seiner weiter oben zitierten Darstellung.

Man vergl. H. Z. Bd. XVI. p. 81.

Auf eine Bemerkung Kober's kommt Bolze zurück in H. Z. II. p. 334: „Zwei Parallellinien sind nach rechts ebenso parallel, wie nach links, also müssen sie sich nach links ebenso gut in einem unendlich entfernten Punkte schneiden, wie nach rechts; folglich haben sie zwei Punkte miteinander gemein.“

Dieser Einwand ist hinfällig, denn die neuere Geometrie nimmt ausdrücklich nur einen unendlich entfernten Punkt auf der Geraden an resp. sie identifiziert die unendlich entfernten Punkte. Man kann auf folgende Weise zu dieser Vorstellung gelangen. Gegeben sei ein Strahl und eine Gerade der Einfachheit halber in solcher Lage, dafs der Strahl durch den Nachbarpunkt seines Anfangspunktes auf der Geraden gehe. Denkt man sich nun den Strahl in drehender Bewegung, so wird er auf der Geraden alle Punkte nach der einen Seite hin stetig durchlaufen (passieren): in zwei aufeinanderfolgenden Lagen des Strahles werden zwei benachbarte (endlich oder unendlich benachbarte) Punkte der Geraden getroffen. Der Schnittpunkt rückt immer weiter hinaus, ohne dafs diese Beziehungen sich ändern. Ist nun der Strahl parallel zur Geraden und nimmt man an, dafs er in diesem Falle einen unendlich fernen Punkt mit der Geraden gemeinsam habe, so kann er nun eine halbe Volldrehung machen, ohne dafs er mit der Geraden einen Punkt im Endlichen gemein hat. Während dieser ganzen Bewegung aber hat er einen unendlich fernen Punkt mit der Geraden gemeinsam. Dreht man dann noch etwas weiter, so haben Strahl und Gerade wieder einen Punkt im Endlichen gemein. Wie man nun dazu kommt, die unendlich vielen unendlich entfernten Punkte als einen einzigen zu betrachten, wird sofort klar, wenn wir drei aufeinanderfolgende Lagen des Strahles im Endlichen betrachten. Die drei zugehörigen Punkte der Geraden sind Nachbarpunkte, reihen sich stetig aneinander. Dies gilt ausnahmslos im Gebiete des Endlichen. Übertragen wir diese Betrachtung auf den Grenzfall so liegt zwischen dem äufsersten Punkte nach der einen Seite hin und dem äufsersten Punkte nach der andern Seite hin nur ein Punkt, „der“ unendlich entfernte Punkt der Geraden. Noch, fast möchte ich sagen, anschlau-

licher gestaltet sich diese Untersuchung, wenn wir nicht einen Strahl und eine Gerade nehmen, sondern zwei Gerade. Hier haben wir direkt äufsersten Punkt nach der einen Seite, unendlich entfernten Punkt, äufsersten Punkt nach der andern Seite. Alle drei reihen sich stetig aneinander in völliger Analogie mit den Betrachtungen im Endlichen, es liegen sozusagen nebeneinander äufserster Punkt nach rechts, unendlich entfernter Punkt, äufserster Punkt links. Die Singularität des unendlich entfernten Punktes ist also hier noch einleuchtender.[1])

Es geht aus diesen Betrachtungen zugleich hervor, wie man zu der Fiktion des unendlich entfernten Punktes der Geraden gekommen ist: es ist eben die einheitliche Auffassung, die zu dem methodisch notwendigen unendlich fernen Punkt geführt hat. Aber auch nur aus diesem Gesichtspunkte ist die Einführung des unendlich fernen Punktes erklärlich und gestattet; nicht aber ist es etwa zwingende Wahrheit, da wir ja die Analogie des Endlichen und Unendlichen gar nicht ohne weiteres postulieren dürfen. Es ist also bei der eben beschriebnen Betrachtung sehr wohl der eine Fall als Grenzfall[2]) auszunehmen und als solcher zu bezeichnen, indem wir sagen, dafs die beiden Geraden da keinen Punkt gemeinsam haben.

Den verschiedenen Angriffen tritt nun Sturm in einem zweiten Aufsatze — H. Z. Bd. II. p. 391 — „Ueber die unendlich entfernten Gebilde“ entgegen, in dem er leider anfänglich den vornehmen Ton objektiver wissenschaftlicher Dis-

---

[1]) Auch hier mufs ich wieder auf Steiner's Darstellung selbst verweisen, mit der die meinige ja im wesentlichen übereinstimmt. Ich mufs jedoch hervorheben, dafs meine Darstellung von der Steiner'schen völlig unabhängig entstanden ist; das Zitat, obwohl an früherer Stelle, ist doch erst später von mir hinzugefügt worden.

[2]) „Parallel sein heifst also zunächst nur weder konvergent noch divergent sein. — Nimmt man zu dem Zwecke in einer von zwei konvergenten Geraden einen festen Punkt an und dreht um ihn die Gerade, bis der früher konvergente Strahl divergent ist, so mufs eine Übergangsrichtung als gemeinschaftliche Grenze vorhanden sein, welche weder konvergent noch divergent d. h. parallel ist, ebenso sicher, wie ein schwingendes Pendel einmal sich in der senkrechten Richtung befinden mufs.“
Zerlang in H. Z. Bd. III. p. 266.

kussion fallen läfst, obwohl er zugeben mufs: „Ich selbst bin, seitdem ich die Angriffe erfahren, erst tiefer in die Anschauung eingedrungen, deren hohen Wert als überaus kräftiges Beweisinstrument ich bei meinen nun doch schon ziemlich ausgedehnten geometrischen Untersuchungen erkannt, über deren innere Wahrheit und Berechtigung oder vielmehr Notwendigkeit ich aber noch wenig nachgedacht hatte."

Was zunächst das Wort „unerreichbar" betreffe, so habe er gemeint dem „physischen Menschen unerreichbar" wegen der endlosen Zeit, die zum Erreichen nötig sein würde. Er habe es nur als Übergangswort zu unendlich entfernt gebraucht, ohne besondern Wert darauf zu legen. Es handle sich um eine Definition der Parallelen, die der neuen Anschauung sich anbequeme, ihr wenigstens nicht widerspreche. „Das scharfe Bewufstsein, was parallele Linien sind, bekommt der Schüler bald, trotzdem die Definition nicht vollkommen ist."[1]) Vielleicht sei deshalb eine Definition in Tertia oder Sekunda nicht wichtig.

Sturm kommt dann darauf zurück, dafs die endliche Distanz zweier Parallelen in unendlicher Entfernung gegenüber dieser Entfernung ignoriert werden müsse, da sonst ein Hauptprinzip der Geometrie verletzt werde.[2]) „Man ersieht, dafs ich ebenfalls annehme, dafs sich parallele Linien in Wirklichkeit nie treffen, einen „endlichen" Punkt nicht gemein haben; aber für uns Menschen, die wir uns von ihren unendlich entfernten Partieen eben in unendlicher Entfernung befinden, sind diese Partieen nicht verschieden, sondern identisch."

Weiter wird die Singularität des unendlich fernen Gebildes dadurch erläutert, dafs sie eine Folge der Relation zu den endlichen Punkten sei.

„Mit den endlichen Gröfsen verglichen sind die unendlich

---

[1]) Dieses scharfe Bewufstsein, was parallele Linien sind, ist meiner Meinung nach eben die Auffassung der Parallelen als solcher Linien, die in konstanter Entfernung nebeneinander herlaufen und sich daher nie treffen.

[2]) Auch hier also tritt wieder das Prinzip in den Vordergrund, nicht die Wahrheit der Auffassung. Man vergleiche Kober's Replik und Fresenius, Noch einmal die neuere Geometrie und die unendlich entfernten Gebilde. H. Z. Bd. II. p. 494.

grofsen Gröfsen alle gleich, mit einander verglichen sind sie verschieden."

„So haben also auch für uns die sämtlichen unendlich fernen Punkte einer Geraden, sobald wir sie in Beziehung setzen zu endlichen Punkten, den Wert eines einzigen Punktes. Nehmen wir irgend einen endlichen Punkt der Geraden als Ausgangspunkt, so entspricht jeder Entfernung von demselben ein Punkt, der Entfernung ∞ also auch (nur) ein Punkt."[1])

„Zwei Parallelen haben also einen „endlichen" oder „eigentlichen" Punkt in Wahrheit nicht gemeinsam, aber ihre unendlich fernen (uneigentlichen) Punkte sind identisch; ihre unendlich fernen Partieen befinden sich, möchte ich sagen, in demselben unendlich fernen Punkte."

Sturm knüpft noch weitere Betrachtungen über unendlich entfernte Gebilde an, kommt auf das Reziprozitätsgesetz zu sprechen, erwähnt die Degeneration und die imaginären Gebilde und betrachtet schliefslich „die Sache auch etwas mit Hilfe der analytischen Geometrie".

p. 406 macht Sturm einige Bemerkungen, die uns zu der zweiten Auffassung hinüberführen. Es heifst da: „Gewöhnlich wird bei parallelen Linien viel von Richtung gesprochen, ohne dafs die Bedeutung dieses Wortes vorher erläutert worden ist. Gemeinhin pflegt man zu demselben noch die Bestimmung wohin? hinzuzufügen: „ich gehe in der Richtung auf eine Stadt," „die Kanonen schossen alle in derselben Richtung d. h. auf denselben Punkt hin". Wenn man in der Geometrie das Wort ohne den bestimmten Zusatz gebraucht, so geschieht dies infolge einer ein für alle Male gemachten Konvention über das Ziel der Richtung: wenn nun aber gerade parallele Geraden als von derselben Richtung bezeichnet werden, so müssen doch auch sie ein gemeinsames

---

[1]) Wird nicht eine Richtung auf der Geraden festgesetzt, so entspricht jeder Entfernung vom Ausgangspunkt nicht ein Punkt, sondern wir erhalten zwei Punkte, einen nach rechts und einen nach links. Ist somit Sturm's Prämisse falsch, so ist es auch die Schlufsfolgerung, dafs der Entfernung ∞ ein Punkt entspreche. Dieser Beweis erscheint also verfehlt. Man vergleiche meine Ausführungen zu diesem Punkte weiter oben.

Ziel für ihre Richtung haben: ein unendlich fernes — als Punkt erscheinendes — Objekt."

Damit verfällt Sturm in den verhängnisvollen Irrtum, Richtung und Ziel zu verwechseln: ein äufserst schwerer Fehler, der uns bei der sonstigen Schärfe der Auffassung sehr merkwürdig berührt. Was darüber zu sagen ist, findet sich im § 1 des ersten Kapitels; hier nur kurz noch einmal die Zurückweisung: Was dasselbe Ziel hat, hat deshalb nicht dieselbe Richtung; und umgekehrt. Wenn zwei Menschen auf eine Stadt zugehen, so haben sie — im allgemeinen — nicht dieselbe Richtung.

Sturm fährt dann fort: „Zwei Linien haben dieselbe (oder gleiche) Richtung, wenn sie nach demselben unendlich entfernten Punkte (oder nach zwei verschiedenen im Unendlichen gelegnen, aber für uns identischen Punkten) hinstreben. Zwei Menschen gehen in derselben Richtung (ohne Zusatz), wenn sie dasselbe unendlich entfernte Objekt stets im Auge behalten; die Absicht es erreichen zu wollen, ist ja gar nicht notwendig."

In diesen Worten liegt wieder dieselbe Verwechslung wie oben, die Verwechslung von Ziel und Richtung. Nur ist allerdings zu bemerken, dafs hier die einzige zulässige Ausnahme vorliegt. In dem Falle nämlich, wo zwei Geraden parallel sind, treffen die beiden Bedingungen gleichzeitig ein, dafs die Geraden sowohl gleiche Richtung[1]) als auch gleiches Ziel haben. Hier, aber auch nur hier, darf beides gleichwertig für einander gebraucht werden. Vielleicht ist dies der Grund, der Sturm zu seinem Irrtum veranlafst hat.[2])

Nicht unbeachtet dürfen dann die Worte in der Klammer bleiben. Danach haben jede zwei gerade Linien gleiche Richtung, denn sie sind doch nach verschiedenen im Unendlichen gelegnen Punkten gerichtet. Man sieht, selbst die Angriffe haben doch immer noch nicht vermocht, völlige Klarheit zu schaffen.

Wir sind mit den letzten Erörterungen schon tief in das Gebiet der zweiten Definition gedrungen, wollen aber doch

---

[1]) Nach allgemeinem Sprachgebrauch.
[2]) Man vergleiche H. Z. XVI. p. 339.

erst noch einmal zur ersten Definition zurückkehren und unsre Ansicht darüber kurz aussprechen. Nach unsern Erörterungen hat sich ergeben, daſs die Definition in ihrer ursprünglichen Form durchaus brauchbar für den Schulunterricht ist, besonders wenn man Veranlassung nimmt, sie mit der dritten Definition, die den konstanten Abstand benutzt, zu kombinieren. Dagegen empfiehlt es sich auf der Schule vorläufig von einer Definition, die sich modernen Ansichten anpaſst, abzusehen.[1])

2) Die Geraden haben dieselbe oder gleiche Richtung (Richtungen)

oder die Geraden bilden mit einer Transversalen gleiche Winkel.

Die vorliegende Erklärung ist sehr beliebt; soweit wir im Augenblick übersehen können, diejenige, die bei weitem die andern überwiegt. Sieht man genauer nach, so wird man finden, daſs die meisten, die sich ihrer bedienen, eine nähere Erörterung des Begriffes Richtung nicht für nötig gehalten haben. So war es bequem auf grund eines nicht genau präzisierten Begriffs eine Erklärung der Parallelen aufzubauen, die aber dadurch selbst unklar blieb.

Wir müssen zunächst gegen die äuſsere Form der Definition uns aussprechen. Vor allen Dingen ist es der Ausdruck dieselbe Richtung, gegen den ich immer wieder ankämpfen werde, wenn auch Hr. Professor Lorberg in Bonn mich deshalb für einen noch gröſsern Ignoranten in mathematisch-philosophischen Erörterungen halten sollte, als er jetzt schon thut — vorausgesetzt, daſs das möglich ist. Es liegt nämlich hier durchaus etwas Besondres vor. Wir können von zwei Gegenständen sagen, sie haben dieselbe Farbe; aber das ist etwas ganz andres, als: zwei Gerade haben dieselbe Richtung. Ich habe schon im II. Kapitel auf die Besonderheit unsres Falles hingewiesen. Zwei Gerade, die dieselbe Richtung haben, sind durchaus nicht anders zu denken, als zusammenfallend. Es leuchtet das ein, wenn wir von Einer bestimmten Richtung

---

[1]) Man vergleiche noch: Scherling, Der Streit über den unendlich entfernten Punkt. — H. Z. Bd. III. p. 463. — Ferner die Diskussion Reidt-Weinmeister, H. Z. XI. p. 111, f.

ausgehen. Denken wir uns dann zwei Gerade in dieser Richtung, so fallen sie unweigerlich zusammen, d. h. Gerade mit derselben Richtung sind zusammenfallend, nichts anderes. Man erkennt aber auch an diesem Beispiele sofort den Unterschied zwischen unserem besondern Falle und irgend einem andern z. B. dem von uns gewählten Beispiele der Farbe. Dieselbe Farbe kann ich mir mehreremale, an verschiednen Orten denken, ohne dafs dadurch ihre Qualität irgendwie berührt wird; anders bei der Richtung. Eine bestimmte Richtung ist eben nur einmal vorstellbar, wollten wir sie uns an verschiednen Stellen vorstellen, so bleiben sie eben nicht die Eine bestimmte Richtung. Es geht also hieraus hervor, dafs Richtung nicht eine Eigenschaft ist, welche bei zwei verschiednen Geraden völlig übereinstimmen kann. Wer mir hier etwa entgegnen will, dafs z. B. doch viele Linien denkbar seien, die alle Nord-Südrichtung haben würden, den bitte ich sich diese Linien direkt oder nahe beim Nord- oder Südpol vorzustellen, woraus sich sofort ergeben wird, dafs die Identität der Richtung nur den Worten, nicht der Sache nach besteht. Ganz analoges gilt für Ausdrücke wie „wagerecht“, „senkrecht“. Auch hier handelt es sich nur um eine scheinbare Identität, denn diese Worte bedeuten eben an vorschiednen Orten etwas anderes, wenn auch wesentlich identisches. Es ist aber auch hier unser Spezialfall völlig da, wenn wir uns im Raum die Nord-Südrichtung denken, die also vom Nord- nach dem Südpol hingeht. Dann giebt es auch hier nur Eine, und alle Geraden, die sie haben, fallen in eine zusammen, die bestimmt ist durch die beiden Punkte Nordpol und Südpol.

Eine weitere Frage ist nun, ob es heifsen dürfe: Gerade von gleicher Richtung resp. die Geraden haben gleiche Richtung, oder ob es heifsen müsse: die Geraden haben gleiche Richtungen.

Zu dieser Frage bemerkt Hoffmann in seiner Zeitschrift Bd. XXIII. p. 341:

„Man findet immer noch hier und da die Definition: Parallele Gerade sind solche, welche gleiche Richtung haben.

Zuvörderst ist diese Definition sprachlich fehlerhaft.

Was ist „gleiche Richtung"? Es giebt höchstens Richtungen, welche einander gleich sind oder kürzer ausgedrückt: „einander gleiche Richtungen", oder in der Einzahl: „eine Richtung, welche einer andern gleich ist". Ähnlich: „Was ist eine gleiche Kugel?"

Hiermit können wir nicht übereinstimmen. Der Sprachgebrauch hat sich bei diesen Wendungen freier entwickelt und es wird Niemandem einfallen darin einen Fehler zu suchen, wenn man z. B. sagt, zwei Gegenstände haben gleiche Farbe. Man würde sogar, wenn sie einfarbig wären, es für einen Fehler halten zu sagen, die beiden Gegenstände haben gleiche Farben, da man dann daran denken würde, dafs beide mehrfarbig seien. Gegen den Gebrauch des Singulars liefse sich also an sich nichts einwenden.

Des weitern bemerkt dann Hoffmann, dafs der Ausdruck „gleich" deshalb nicht zulässig sei, weil man in der Mathematik „gleich" nur für Gröfsen also im Sinne von „gleich grofs" gebrauchen dürfe. Auch dies scheint uns eine Einschränkung, deren Notwendigkeit wir nicht einsehen. Wollte man aber diese Einschränkung festsetzen, dann würde für den Ausdruck „gleiche Richtung" dasselbe gelten, was wir weiter oben für „dieselbe Richtung" auseinandergesetzt haben: wir haben es hier mit einem Fall zu thun, wo Gleichheit und Identität zusammenfallen.

Von der gröfsten Wichtigkeit erscheint uns wieder in Bezug auf diesen Ausdruck das Wesen der Richtung selbst, dafs wir hier keine Nuancen haben, wie bei Farbe, Licht etc., so dafs also die Gleichheit mit der Identität wie gesagt zusammenfällt. Doch wird es notwendig sein, auf die Elemente zurückzugehen, um völlige Klarheit zu schaffen. Zwei Richtungen, die wir mit einander vergleichen, können entweder — man denke an die Erörterungen des § 1 im ersten Kapitel — den einen oder den andern Punkt oder beide konstituierende Elemente oder nichts gemeinsam haben. Haben sie den Ausgangspunkt gemeinsam, das Ziel verschieden: so sind die Richtungen verschieden; haben sie verschiedene Ausgangspunkte, aber gleiches Ziel: so sind die Richtungen verschieden; haben sie gleichen Anfang und gleiches Ziel: so sind die Rich-

tungen gleich d. h. hier also identisch (dieselben). — Niemand aber wird doch bei einer solchen Analyse auf den Gedanken kommen, dafs nun zwei Richtungen gleich seien, die weder in der einen, noch in der andern Hinsicht (Element) übereinstimmen.[1])

Was dazu geführt hat, die Richtung in die Definition der Parallelen einzuführen, ist wohl einerseits die früher übliche Definition des Winkels als Richtungsunterschiedes[2]) gewesen — was dann für Parallelen die Richtungsgleichheit ergab[3]) — andererseits der sogenannte Richtungsbeweis, der so verlockend bequem erscheint, in der That aber nur ein circulus ist. Er wird auch direkt zur Definition verwendet, resp. das in ihm liegende Agens, wenn man bei der Definition der Parallelen ausgeht von dem Umstand, dafs sie mit ihren Transversalen gleiche Winkel bilden. Aber hier werden Eigenschaften, die aus der Definition folgen, vorweggenommen und zur Definition verwendet, was offenbar nicht zulässig ist.[4])

Wir sind also auf das Bestimmteste dafür, dafs eine Definition der Parallelen, die sich auf den Richtungsbegriff stützt, zu verwerfen sei; dafs aber, wenn eine solche dennoch

---

[1]) Hierzu vergleiche man aus dem Artikel „Studien über geometrische Grundbegriffe" des Herausgebers der H. Z. den Abschnitt „Gleiche Richtungen", IV. p. 111, der für die hier erörterten Fragen von grofser Bedeutung ist.

[2]) „Parallelen heifsen Linien gleicher Richtung. Die Gleichheit der korrespondierenden Winkel ergiebt sich aus der Gleichheit der Richtungsunterschiede."

J. Kober, Ueber das Unendliche und die neuere Geometrie. H. Z. III. p. 261. — Vergl. auch H. Z. III. p. 535.

[3]) Die Alten hatten das Wesen gleich im Namen zum Ausdruck gebracht: das Nebeneinander (ohne etwas Gemeinsames). Auch von diesem Gesichtspunkte aus ist es ganz unzulässig, nun plötzlich statt des Trennenden das Einigende (Gleiche) hervorzuheben. So nur konnte es auch kommen, dafs man im gewöhnlichen Leben ganz verkehrter Weise verwandte Anschauungen z. B. als parallel zu bezeichnen pflegt.

[4]) „Die Mathematik soll auch den Schein der Phrase vermeiden, deshalb halte ich es jetzt für ganz verwerflich, die Parallelentheorie mit dem Richtungsunterschiede abzumachen."

Ziegler, Thesen zu dem Streite über geometrischen Unterricht. — H. Z. III. p. 189.

beliebt wird, weder von derselben noch von der gleichen Richtung die Rede sein dürfe, sondern dafs man dann nach einem passenderen Ausdruck zu suchen hat.

Schon oben war in einer Fufsnote darauf hingewiesen, dafs Hoffmann sich mit hierhergehörigen Untersuchungen beschäftigt hat; auch er kommt dabei zu dem Resultat, dafs das Kriterium für die Gleichheit von Richtungen in dem gleichen Richtungsunterschiede gegen eine dritte Gerade zu suchen sei. Dann kommt er auf den Unterschied von gleichgerichtet und parallel zu sprechen und hierbei kommt auch ihm der Gedanke, dafs der Ausdruck „gleiche Richtung“ seine Bedenken habe, denn er sagt in einer Fufsnote: „Ob es nicht zweckmäfsiger sein dürfte, den Begriff gleiche Richtung mit ähnliche Richtung zu vertauschen, will ich hier nur angeregt haben.“ Diese Worte zeigen deutlich, dafs auch ihm Skrupel an dem landläufigen Ausdruck aufgestiegen sind. Es ist eben die Definition der Parallelen mit Hülfe von gleichen Richtungen nichts anderes, als eine Erklärung idem per idem. Was für die Richtungen gleich, ist für die Geraden parallel. Kein Mensch wird sich sogenannte gleiche Richtungen vorstellen können, ohne dafs er sich parallele Gerade denkt, oder gar gleiche Richtungen vor parallelen Geraden denken. Die ganze Definition ist ein Spiel mit Worten.

Gilles stellt sich energisch auf den Standpunkt der Richtungsdefinition der Parallelen in einem Aufsatze „Bedenkliche Richtungen in der Mathematik“ in H. Z. XI. p. 17. Allerdings sagt er: „Selbstverständlich mufs der Begriff gleiche Richtung definiert werden; wenn dabei auch ein axiomatisches Element zurückbleibt, so ist dasselbe doch in der möglichst elementaren Form einzuführen.“ Er verweist dabei auf sein Lehrbuch S. 9 und S. 6, wo sich Seite 9 folgendes findet:

„Die Gerade ist bestimmt durch einen Punkt und eine Richtung, in welchen Angaben das ganze Wesen der Geraden enthalten ist.“ Aufzählung der Fälle:

„2. c) Der Ausgangspunkt ist verschieden, die Richtung dieselbe.“

„EF und RS haben dieselbe Richtung bedeutet, dafs beide Geraden sich nur der Lage nach unterscheiden, so dafs

die Gerade *EF*, wenn sie in allen Punkten sich gleichmäfsig über die Gerade *ER* gleitend bewegt, in demselben Augenblick die Lage *RS* bekömmt, wenn ein Punkt derselben in die Gerade *RS* fällt, d. h. alle Punkte fallen zu gleicher Zeit in *RS*."

Selbst mit dieser, den gewöhnlichen Darstellungen gegenüber sehr viel gewissenhafteren Behandlung können wir uns nicht befreunden. Die geschilderte Bewegung setzt die Kenntnis des Parallelen voraus.

Von besonderer Wichtigkeit ist ferner noch ein hierhergehöriger Aufsatz: „Der sogenannte Richtungsbeweis in der Lehre von den Parallelen" von Dr. Hubert Müller in H. Z. XVI. p. 407.

Er leitet den Artikel mit folgenden Worten ein: „Schwierige geometrische Beweise sind kaum an einer andern Stelle des Unterrichts so unangenehm wie in der Lehre von den Parallelen, einmal, weil sie Knaben von 12 Jahren beigebracht werden müssen, und zweitens, weil die zu beweisenden Sätze so sehr einfach und jedem Schüler von vornherein anschaulich gewifs sind. In der lobenswerten Absicht hier Hülfe zu schaffen hat man den Grundsatz „Parallele Linien haben gleiche Richtung" aufgestellt und mit demselben einen Beweis geführt, welcher in dieser Zeitschrift (IX. 192) angegriffen worden ist."

Bolze hat nämlich am angeführten Ort gezeigt, dafs es sich bei dem sog. Richtungsbeweis um einen Scheinbeweis handelt. Müller giebt dies nicht zu und sucht an einem Beispiele die Richtigkeit seiner Behauptung nachzuweisen. Er sagt dann:

„Der Schwerpunkt liegt in dem Begriffe Richtungsunterschied, welcher sich dem allgemeinen Begriffe des Unterschiedes ebensowenig fügt, als die Potenzen mit negativen Exponenten dem ersten Potenzbegriff sich unterordnen. Der Richtungsunterschied wird nicht durch Abziehen einer Richtung gefunden, oder umgekehrt gesagt: der Richtungsunterschied ist nicht wieder eine Richtung, sondern ein Winkel."

„1) Linien gleicher Länge sind solche, deren Längenunterschied Null ist. Dafs auch die Parallellinien als Linien

gleicher Richtung solche sind, deren Richtungsunterschied Null ist, darf man nicht als logisch evident ansehen; dieser Ausspruch kann aber anschaulich evident sein."

Linien gleicher Richtung würden zunächst Schenkel eines Nullwinkels sein; sie sollen aber auch parallel sein. Es handle sich also um eine Identität des Nullwinkels und des Streifens zweier Parallelen. Es wird dann das Bedenkliche dieser Identität ausführlich erörtert.

„2) Gleiche Richtungen bilden mit derselben dritten gleiche Richtungsunterschiede" dürfe nicht unmittelbar als richtig angesehen werden.[1]) Auch hier zeigt sich die Unzulänglichkeit des Richtungsbeweises.

Müller fafst seine Resultate in den beiden Sätzen zusammen:

„1) Wer mit Richtungen operieren will, darf den unendlich fernen Punkt nicht verleugnen.

2) Wer den Richtungsbeweis führt, begeht den Fehler, dafs er Auffassungen, welche erkannten Wahrheiten entspringen, als Anschauungen aufstellt, um aus ihnen die ursprünglichen Wahrheiten als logische Folgerungen abzuleiten."

Wir können uns den Ausführungen Müller's im wesentlichen nur anschliefsen, besonders der zweite Satz ist uns völlig aus der Seele gesprochen, auch wir sehen im Richtungsbeweise einen völligen circulus.

---

[1]) In Schlömilch's Geometrie des Mafses findet sich:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Richtung } a = \text{Richtung } b\\ \text{Richtung } c = \text{Richtung } c\end{array}}{\text{Winkel } ac = \text{Winkel } bc}$$

„weil Gleiches mit Gleichem verglichen Gleiches liefert."

Ziegler bemerkt dazu (H. Z. III. p. 189): „Dieser verzwickte Ausdruck beweist die Unsicherheit des Schlusses und berechtigt zu folgendem Dilemma: Ist diese Vergleichung eine Subtraktion oder nicht? ist Unterschied im gewöhnlichen Sinne gleich Differenz, dann kann die Differenz zweier Richtungen nur wieder eine Richtung (kein Winkel) sein, oder ist es ein neuer Begriff, dann ist Richtungsunterschied ebenso tautologisch als Neigung. Schon die Möglichkeit eines solchen Zweifels macht die Argumentation als Schleichweg verdächtig, diese hat in dem Mifsbrauche des Gleichheitszeichens eine fatale Ähnlichkeit mit dem bekannten Beweise, dafs eine Katze drei Schwänze hat."

Hiermit wollen wir die Besprechung dieses zweiten Definitionsversuchs für Parallelen beschliefsen.

3) Die Geraden haben konstanten Abstand. Bei der Besprechung dieser Definition können wir uns ganz kurz fassen, da alles Wesentliche schon besprochen worden ist, besonders bei Gelegenheit von Definition 1). Sowohl in unserer allgemeinen Erörterung am Anfang dieses Kapitels, wie bei der Besprechung der ersten Definition haben wir unsrer Ansicht unverhohlenen Ausdruck gegeben, dafs wir diese Definition wissenschaftlich für korrekt halten und für den Schulgebrauch für am geeignetsten. Dafs zwei Gerade, die überall gleichen Abstand haben, sich niemals treffen werden, ist anschaulich evident, aber auch die Winkelsätze bei einer Transversalen lassen sich auf Grund dieser Definition sehr leicht beweisen, wie das folgende Kapitel lehren wird.

Auf Grund der Untersuchungen schlagen wir also für die Schule folgende Fassung für die Definition von Parallelen vor:

Haben zwei Gerade konstanten Abstand von einander, so dafs sie keinen Punkt gemeinsam haben, so heifsen sie parallel.[1])

An diese Definition dürfen sich dann eine Reihe von Grundsätzen ohne weiteres anreihen.

Nachdem so die drei Definitionen der Parallelen zur Erörterung gekommen, bleibt noch übrig, der Versuche zu gedenken, die gemacht worden sind, an die Stelle des Problems ein andres zu setzen. Nachdem man erkannt hatte, dafs das Problem unbeweisbar war oder besser, dafs sein Beweis noch offen war, und nachdem man dies als einen vermeintlichen Fehler der sonst so strengen Euklidischen Geometrie anzusehen sich befleifsigte, tauchten eine Menge von Versuchen auf, das Problem entweder zu beweisen oder durch ein andres, das der Anschauung mehr entsprechen sollte, zu ersetzen.

Von diesen Versuchen wandten sich die einen dahin, den geometrischen Ort zu konstruieren aller Punkte, die von einer Geraden gleichen Abstand haben. Dafs sich dafür eine Linie ergeben müsse, stand klar fest, aber ein strenger Beweis dafür,

---

[1]) Man vergl. H. Z. XXIII. p. 342.

dafs wir es hier mit einer Geraden zu thun haben, liefs sich ebensowenig erbringen, wie ein Beweis für das eigentliche Problem.

Sehr vielseitig gestalteten sich die Versuche das Axiom, das sich an die Parallelenlehre anschlofs, durch ein andres zu ersetzen, von denen ich hier vorläufig nur einige erwähnen will: bei der Besprechung der einschlägigen Arbeiten wird sich Gelegenheit finden, näher auf die Fragen einzugehen.

Bolyai: Durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, ist stets ein Kreis möglich.

Legendre: Durch jeden Punkt im Innern eines Winkels läfst sich eine Gerade ziehen, die beide Schenkel schneidet.

Schotten: Die Winkelsumme in ebenen Polygonen ist konstant.

Simon: Sind in einem Viereck drei Winkel rechte, so ist es auch der vierte.

Das berühmte Axiom, das sich nun an die Parallelendefinition anschliefst und das den Anlafs zu den tiefsinnigsten Untersuchungen gegeben hat, wird allgemein als das elfte Axiom Euklids bezeichnet. Es ist jedoch sehr wahrscheinlich, dafs es nicht von Euklid als Axiom aufgestellt worden ist, sondern in der Form eines Postulates. Die falsche Stellung nimmt es in den Ausgaben Euklids seit Gregory 1703 ein [1]) (Ausnahmen Peyrard 1814, August 1826). Es lautet: Zwei Gerade, welche von einer dritten so geschnitten werden, dafs die inneren Winkel an derselben Seite der Schneidenden zusammen kleiner als zwei Rechte sind, schneiden sich, gehörig verlängert, an eben dieser Seite. — Wie schon gesagt sind die Versuche, dieses Axiom durch ein andres zu ersetzen resp. zu beweisen, zahlreich gewesen. Heutzutage findet man an seiner Stelle in den Lehrbüchern gewöhnlich den Grundsatz: Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden läfst sich zu dieser nur eine Parallele ziehen, ein Satz, der auch oft als Lehrsatz aufgestellt wird.

Warum gerade dieses Axiom in der Reihe der übrigen

---

[1]) Lindemann im Bd. II der Vorlesungen: Das vierte und fünfte Postulat sind in der ersten griechischen Ausgabe von Euklids Elementen (Basel 1533, Hervagius) unter die Axiome gestellt. Peyrard 1814—18 stellte die richtige Ordnung aus den Handschriften wieder her.

Anstofs erregte, liegt in der Natur der Sache. Die Axiome 1—9 sind rein logisch, resp. Axiome der allgemeinen Gröfsenlehre, daran schliefsen sich die geometrischen Axiome 10—12, von denen 10 und 12 anschaulich evident sind, 11 aber der Anschaulichkeit entbehrt, da es sich um Unendliches handelt. Wer die Gerade als unendlich nach beiden Seiten hin ansieht, für den existiert allerdings die Frage nach dem 11. Axiom nicht, so dafs eigentlich das 11. Axiom nicht den Angelpunkt der Untersuchungen bilden sollte, sondern die Auffassung der Geraden.

Schon im Altertume hatte man übrigens den Zusammenhang des vorliegenden Problems mit der Frage nach der Winkelsumme im Dreieck erkannt. Schon Proclos, Euklids bedeutendster Kommentator, bemerkte, dafs das 11. Axiom die Umkehrung sei des Satzes: In jedem Dreieck betragen zwei Winkel zusammen weniger als zwei Rechte, da alle drei erst zwei Rechte zusammen betragen.

Gauss stellte zuerst 1792 die Behauptung auf, dafs das Parallelenaxiom eine Erfahrungsthatsache und folglich unbeweisbar sei. Von da an datieren denn die Arbeiten, die eine Geometrie unabhängig vom Parallelenaxiom aufstellen. Wir werden Gelegenheit finden, bei der Besprechung einschlägiger Schriften hier und da über diese Arbeiten zu sprechen, ohne hier auf die Frage selbst tiefer eingehen zu müssen, da für die Schule die betreffenden Untersuchungen ohne praktisches Interesse sind.

Entschieden mufs nur die Frage werden, welche Stellung man im allgemeinen System dem Satze anweisen will, wenn man ihn als Axiom nicht anerkennt. Axiom ist das notwendige Minimum der Voraussetzung oder das Urteil, das auf den Grundbegriffen sich aufbaut ohne durch Beweise auf andre Urteile zurückgeführt werden zu können. Als ein derartiges Urteil also vermag die Schule der Nicht-Euklidiker das 11. Axiom nicht anzusehen, sondern sie fafst dasselbe als einen Einschränkungssatz, durch den aus der absoluten Geometrie ein bestimmter beschränkter Teil ausgeschieden wird, derjenige, den wir jetzt als Euklidische Geometrie zu bezeichnen pflegen, den wir besser als anschauliche Geometrie bezeichnen würden.

Ein weiteres Eingehen erspare ich mir und komme direkt

auf die hierhergehörigen Arbeiten. Zunächst will ich eine Reihe von Abhandlungen aus Grunert's Archiv besprechen, dann eine Anzahl Programmarbeiten, die direkt unser Thema zum Gegenstand haben. Daran schliefsen sich die Zitate aus den Lehrbüchern an.

Grunert's Archiv Bd. 8, S. 320 findet sich eine Abhandlung von Matzka, Ueber ein neues logisches Gesetz und seine Anwendung auf die Begründung der Parallelentheorie. Der Verfasser leitet seine Arbeit mit den Worten ein:

„Die Lehre von den parallelen Geraden hat allbekanntlich die hinderliche Eigenheit, dafs man, wie man es auch immer anfangen mag, doch jedesmal auf einen Satz stöfst, der sich nicht in der gewöhnlichen Weise aus seinen Vorläufern, oder aus der Natur der in ihm verbundnen geometrischen Begriffe erweisen läfst."

Die Ursache liege in der Unmöglichkeit, die einfachen Begriffe „Lage und Richtung" erklären oder charakterisieren zu können. Als Abhilfen habe man vielerlei Erklärungen der Parallellinien versucht, allein „es handle sich hier nicht um eine Sach- sondern um eine Worterklärung, d. h. eigentlich um Angabe des Grundes für die Wahl einer Benennung einer bereits erkannten Eigenschaft zweier unbegrenzten geraden Linien."

Die beiden Geraden seien 1) gleichgerichtet oder gleichlaufend, 2) gleichabständig. Das letztere dürfe man aber nicht in die Erklärung hineinnehmen. Erst wenn nachgewiesen sei, dafs beide Eigenschaften sich gegenseitig bedingten, dürfe man den Ausdruck parallel gebrauchen.

Eine andre Abhülfe sei Grundlegung eines möglichst einleuchtenden Lehrsatzes. Hier seien die, die sich auf das Dreieck stützten, von vornherein zu tadeln. Im Übrigen seien es besonders folgende beiden:

1) Zu einer Geraden giebt es durch jeden Punkt nur eine Parallele.

2) Zwei Geraden, die zu einer dritten parallel sind, sind es auch zu einander.

Der Hauptgrund für ihre Aufstellung sei die Analogie; doch widersprächen dem andre Analogieen.

„Die dritte Abhülfe ist die Berücksichtigung des allgemein und streng erweisbaren notwendigen Zusammenhanges zweier Paare unzertrennlich zusammenbestehender Beschaffenheiten oder Merkmale und die daraus folgende Aufstellung der vier, solchen Zusammenhang umständlich und vollständig aussprechenden Sätze."

Der Verfasser stellt sodann einen neuen Hauptlehrsatz der Logik auf und wendet dieses Gesetz dann auf die Parallelentheorie an. Der weitere Gang der Abhandlung ist zu ausführlich, um wörtlich zitiert werden zu können, andrerseits entzieht sich die Arbeit einer kurzen Wiedergabe. Die „Schlufsbemerkung" lautet:

„Nunmehr unterliegt es keinem weitern Anstande, vor aller Kenntnis der Lehre vom Dreiecke, blofs durch Deckung von ebenen Figuren nachzuweisen, dafs durchaus getrennte Geraden auch durchweg gleichabständig von einander sind. Dann ist man berechtigt, solchen Geraden die Benennung parallel zu geben."

Gr. Arch. Bd. 15, p. 361 behandelt Germar „Die Wichtigkeit einer richtigen Auffassung von Thibaut's Beweise der Summe der Dreieckswinkel für die gesamte Elementargeometrie und besonders für die Theorie der Parallelen." In der Einleitung heifst es: „Nach einer Äufserung des Proclos schreibt Eudemus den euklidischen Beweis des Satzes, dafs die Summe aller Dreieckswinkel gleich zwei rechten Winkeln sei, den Pythagoräern zu; er war also schon lange vor Euklides in Gebrauch."

Diese Beweisart gründe sich auf die Gleichheit der Wechselwinkel und danach habe Euklid seine Parallelendefinition gerichtet gegen seinen strengen, logischen Takt.[1])

---

[1]) „Nach allem sind wir gegenwärtig zu der Annahme berechtigt, dafs das Parallelenaxiom sich aus den übrigen Grundvoraussetzungen der Geometrie nicht ableiten läfst und in der That nur als Axiom eingeführt werden kann. Es ist nicht gerade anzunehmen, dafs Euklid sich diesen modernen Anschauungen schon genähert habe; aber aus der Ordnung der Sätze des ersten Buches ergiebt sich zur Evidenz, dafs ihm die eigen-

Eine Definition der Parallelen müsse vom genus Parallellinien überhaupt ausgehen, ehe sie auf gerade Parallele ausgehe. „Für das genus ist aber schwerlich ein anderes Merkmal aufzufinden, als das, welches der sensus communis überall mit dem Parallelismus verbindet, nämlich den durchgängigen gleichen Abstand."

Der Beweis, dafs derartige Linien sich nicht schnitten, sei leicht, während dies umgekehrt keineswegs der Fall sei, nämlich, dafs gerade Linien, welche unendlich verlängert sich nicht schneiden, deswegen gleichen Abstand haben müfsten.

Ebenso sei der Beweis unmöglich, dafs zwei Gerade, die in zwei Punkten gleichen Abstand hätten, überall gleichen Abstand hätten, wenn nicht vorher der Satz von der Dreieckswinkelsumme unabhängig von der Parallelenlehre gefunden sei.

Vermehrt werde die Schwierigkeit durch den unbestimmten Begriff der geraden Linie, wenn er sich auf die Richtung stütze.

Von der gröfsten Wichtigkeit sei demnach der Thibaut'sche Beweis von der Dreieckswinkelsumme.

Es folgt dann eine höchst umständliche Herleitung des Thibaut'schen Satzes und der dazu nötigen Hülfssätze; auch die direkten Folgesätze werden aufgestellt.

„Jetzt sind alle Vorbedingungen vorhanden, deren es bedarf, um zum Endziele zu gelangen, d. h. den überall gleichen Abstand der geraden Parallelen, und die Gleichheit ihrer Wechselwinkel nach Euklidischer Methode durch die Gleichheit der Dreiecke zu beweisen."

Zuerst wird der Satz bewiesen, dafs zwei gerade Vertikalen auf einer Geraden parallel sind d. h. überall gleichen Abstand

---

artige Stellung dieses Axioms bereits klar wurde und dafs er ganz deutlich Sätze unterschied, die von dem Axiom unabhängig sind, und solche, die sich nur mit seiner Hülfe beweisen lassen. Es ist nicht unwahrscheinlich, dafs bei Euklid das Motiv dieser Scheidung nur das Unbehagen darüber war, Sätze mit Hülfe einer nicht zu beweisenden Wahrheit zu begründen, deren Evidenz doch nicht unmittelbar auf der Hand liegt."

Rausenberger, Euklids Elemente, aus „Berichte des Freien Deutschen Hochstifts", Jahrg. 1890.

haben; dann dafs; wenn von zwei Geraden in einer Ebene jede von einer dritten Geraden vertikal geschnitten wird, diese parallel sind. Es wird dann zu einer beliebigen Transversale übergegangen und zum Schlufs der Satz bewiesen, dafs bei gleichen Wechselwinkeln die Geschnittnen parallel sind.

Im 18. Bd. von Grunerts Archiv giebt Hörlych einen „Abrifs eines Beweises für den sogenannten elften Euklidischen Grundsatz". Dieser Beweis beruht auf der unendlichen Konstruktion halbseitiger Dreiecke und teilt also diese Schwäche mit allen ähnlichen Versuchen. Der Herausgeber entschuldigt übrigens die Aufnahme des Artikels in das Archiv in einer Nachschrift.

Wichtiger erscheint ein Aufsatz „Ueber den zweiunddreifsigsten Satz im ersten Buche der Elemente des Euklides" von W. Fischer in Gr. Archiv, Bd. 28, p. 365. Auch hier handelt es sich um Thibaut's Beweis. Als ersten Grundsatz spricht er aus, dafs man einen Strahl drehen könne und daher auch die Lage zweier gegebenen Strahlen als Resultat einer Drehung ansehen könne. Die fertige Drehung heifse Winkel. Zusammenhang zwischen voller Drehung und vollem Winkel. Dem folgt Definition des gestreckten Winkels und darauf der Grundsatz:

„I. Ein Strahl kann durch keine einfachere und kürzere Bewegung aus einer gegebnen Richtung in die entgegengesetzte gelangen, als dadurch, dafs er um seinen Anfangspunkt einen gestreckten Winkel beschreibt."

„II. Auf einer Ebene kann ein Strahl, der eine gegebene Richtung verläfst, ohne rückläufig zu werden, durch keine einfache und kürzere Bewegung in seine ursprüngliche Lage zurückkommen, als durch eine volle Umdrehung um seinen Anfangspunkt als Scheitel."

Es folgt dann der Lehrsatz, dafs alle gestreckten Winkel gleich sind, mit einer Reihe von Zusätzen über Vollwinkel, hohle, erhabene, rechte etc.

Grundsatz. „Bei zwei Strahlen, die in verschiednen

Richtungen von einem Punkte auslaufen, ist keine einfachere und kürzere Bewegung aus dem einen in den anderen denkbar als die Drehung, wodurch der hohle Winkel zwischen ihnen erzeugt wird."

Daran schliefst sich dann der Lehrsatz: „Bei jedem Dreieck ist die Summe der drei Innenwinkel gleich einem gestreckten Winkel oder $= 2R$."

Es wird die bekannte Schiebung und Drehung vorgenommen. (α, β, γ sind die Innen-, x, y, z die Aufsenwinkel.)

„An sich betrachtet ist die gesamte Drehung des Strahls $= x + y + z$.

Dieselbe kann aber, da sie zwar um drei verschiedene Punkte, jedoch fortwährend in einerlei Sinn vor sich ging, und da der bewegliche Strahl schliefslich in seine ursprüngliche Lage zurückkam, unmöglich kleiner sein als eine volle Umdrehung um einen einzigen Punkt. Folglich ist jedenfalls

$$1)\quad x + y + z \text{ nicht kleiner als } 4R,$$

obwohl man wegen Ermangelung eines gemeinschaftlichen Scheitels vorläufig $x + y + z$ noch nicht $= 4R$ setzen kann."
Da nun $x + y + z + \alpha + \beta + \gamma = 6R$, so ist

$$2)\quad \alpha + \beta + \gamma \text{ nicht gröfser als } 2R.$$

„Demnach bleibt zu beweisen übrig, dafs $\alpha + \beta + \gamma$ auch nicht kleiner als $2R$ sein kann. — Man ziehe die Verlängerungen AG und BH der Seiten BA und CB und denke sich einen Strahl, der seinen Anfangspunkt N in A und die nämliche Richtung wie AG hat. Diesen Strahl lasse man zunächst den Winkel GAF durchlaufen. Sobald er in AF angelangt ist, schiebe man ihn rückwärts so, dafs sein Anfangspunkt N nach C kommt, aber der Punkt A in ihm bleibt.

Er hat dann die Richtung CA, mithin, weil AF die Verlängerung von CA ist, noch die nämliche wie AF, weshalb zur Drehung GAF keine neue hinzugekommen sein kann. Wird der Strahl aus seiner jetzigen Lage CAF um N in C im vorigen Sinne weiter gedreht, so fängt er sogleich an, den Winkel γ zu beschreiben, gelangt, wenn er γ durchlief, in die Richtung der Seite CB, sowie ihrer Verlängerung BH,

und wird, in CH fortgleitend, bis N auf B kommt, einerlei mit BH, ohne dafs zu den Drehungen GAF und γ eine neue hinzugekommen wäre. Sobald er aber aus BH um N in B die Drehung im vorigen Sinne fortsetzt, beginnt er den Winkel HBD zu beschreiben, und langt, wenn er diesen durchlaufen hat, in BD an. Offenbar ist die gesamte Drehung des Strahls $= G\hat{A}F + \gamma + H\hat{B}D$. Da aber der Strahl aus der Richtung AG in die entgegengesetzte BD kam, so ist es unmöglich, dafs seine gesamte Drehung kleiner sei als eine halbe Drehung um einen einzigen Punkt; folglich ist $G\hat{A}F + \gamma + H\hat{B}D$, oder wegen $G\hat{A}F = \alpha$, $H\hat{B}D = \beta$

3) $\alpha + \beta + \gamma$ nicht kleiner als $2R$.

Aus 2) und 3) geht hervor

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R.$$

Der Verfasser ist auf den zweiten Teil seines Beweises durch eine Notiz in Crelle's Übersetzung von Legendre's Geometrie gekommen und sucht die Schärfe des Beweises in den aufgestellten Grundsätzen und der Verknüpfung der beiden Teile.

Schon bei den einleitenden Worten dieses Kapitels erwähnte ich einer Arbeit von Grunert, „Über den neuesten Stand der Frage von der Theorie der Parallelen", die sich im 47. Bande von Gr. Arch. S. 307 findet und auf die wir nunmehr näher einzugehen haben. Es heifst da:

„Alle Parallelentheorien bewegen sich wenigstens zunächst um das berühmte elfte Axiom des Euklid, dem man allgemein, und gewifs mit vollem Rechte, die zu einem Grundsatze erforderliche Evidenz abgesprochen hat."

Es wird dann das elfte Axiom im Wortlaut mitgeteilt. Hierzu sage Klügel: „Allerdings kann man dem Satze die Stelle unter den Grundsätzen streitig machen. Doch konnte Euklid auch nicht ihn in die Reihe anderer scharf erwiesener Sätze bringen. Er hat ihn also, um einen Ausdruck aus der Kant'schen Philosophie zu borgen, als einen synthetischen Satz a priori unter die Grundsätze gestellt. Der Satz enthält eine Eigenschaft der geraden Linie, welche sie von den krummen

unterscheidet, ob man gleich sie nicht aus der Natur derselben durch eine Verbindung mit anderen Sätzen herleiten kann, weil sie unmittelbar in ihr liegt. Proklus setzt den Grundsatz unter die Postulate.“

Mit dem Grundsatz stehe und falle die Parallelentheorie. Man habe versucht andere Erklärungen und Grundsätze aufzustellen, dabei sei aber die Schwierigkeit immer dieselbe geblieben. Aufs engste hänge aber die Schwierigkeit in der Theorie der Parallelen mit dem Satze von der Winkelsumme im Dreieck zusammen.

Es komme darauf an, klar und bestimmt auszusprechen, worin man die Schwierigkeit der Parallelentheorie finde. Diese ist nach Grunert's Ansicht folgende:

„Läfst sich unter Zugrundelegung der euklidischen Definition der Parallelen, mit Hülfe der niemals angefochtenen und angezweifelten Grundsätze des Euklides, aber mit Ausschlufs des elften unter denselben, ferner mit Hülfe der ohne dieses Axiom in aller Strenge beweisbaren und bewiesenen Propositionen I bis XXVI des ersten Buches der Elemente des Euklides die Lehre von den Parallelen in aller Strenge begründen oder nicht?“

In den letzten Jahren sei die Frage in den Hintergrund getreten gewesen, ja die französische Akademie solle sich einschlägige Arbeiten verbeten haben. Nun sei neuerdings durch die Veröffentlichung des Briefwechsels Gauss-Schumacher die Frage wieder in Flufs gekommen. Gauss habe darin auch auf die fast vergessenen Arbeiten Lobatschewsky's und der beiden Bolyai's aufmerksam gemacht und sich im wesentlichen damit einverstanden erklärt. Grunert empfiehlt die Arbeiten Hoüel's,[1]) will aber in der vorliegenden Abhandlung vor-

---

[1]) 1. Études géométriques sur la théorie des parallèles par N. J. Lobatschewsky; traduit de l'Allemand par J. Hoüel. Suivi d'un extrait de la Correspondance de Gauss et de Schumacher. Paris 1866.

2. Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire, ou Commentaire sur les XXXII premières positions des Élémens d'Euclide, par J. Hoüel. Paris. 1867.

zugsweise auf Legendre's[1]) schöne Beweise näher eingehen.

Der Gang des Beweises schliefst sich nun völlig an Legendre's Beweisgang an und es ergeben sich folgende zwei Sätze als Resultate:

„A. Die Summe der drei Winkel eines ebenen Dreiecks kann nicht gröfser sein als zwei rechte Winkel, dieselbe kann nur ebenso grofs oder kleiner als zwei rechte Winkel sein."

„B. Wenn nur in irgend **einem** ebenen Dreiecke die Summe der drei Winkel zwei Rechte beträgt, so beträgt in völliger Allgemeinheit in allen ebenen Dreiecken ohne Ausnahme die Summe der drei Winkel zwei rechte Winkel, und ist also eine den Wert $2R$ habende konstante Gröfse."

Man scheine sich darüber einig zu sein, dafs die apriorische Erkenntnis mit diesen beiden Sätzen ihr Ende erreiche und nur die Erfahrung zu weiterer Beantwortung übrig bleibe. Alle Messungen hätten nun — je nach dem Mafse ihrer Genauigkeit — die Thatsache, dafs die Winkelsumme des Dreiecks zwei Rechte betrage, sehr wahrscheinlich gemacht. Mit der gröfsten Wahrscheinlichkeit gelte daher der Satz: „In jedem ebenen Dreieck ist die Winkelsumme gleich zwei rechten Winkeln." Auf ihm baue sich — mit der gemachten Einschränkung — die Geometrie auf. Hieran schliefse sich dann der Beweis des elften Axioms, sowie der damit zusammenhängenden Sätze.

In einer Nachschrift spricht sich Grunert dahin aus, dafs die Nichteuklidische Geometrie von der Schule fern zu halten sei.

Schliefslich behandelt noch Worpitzky unsre Frage im Bd. 55 von Gr. Arch. p. 417 in der Abhandlung „Über die Grundbegriffe der Geometrie." Er stellt das Axiom auf: „Es giebt kein Dreieck, in welchem jeder Winkel kleiner ist, als

---

[1]) 1. Mémoires de l'Académie des Sciences. T. XII. p. 369.
2. Élémens de Géométrie (3. bis 8. Auflage).

ein beliebig klein gegebener Winkel," das er dem elften Axiom aus verschiedenen Gründen vorzieht. Legendre's Nachweis, dafs die Winkelsumme nicht gröfser als $2R$ sei, erkennt er als völlig streng an, schliefst daraus, dafs ein Dreiecksaufsenwinkel nicht kleiner sein kann, als die Summe der beiden Dreieckswinkel an den anderen Ecken, woraus folgt, dafs kein Dreieck, in dessen Felde ein anderes Dreieck liegt, eine gröfsere Winkelsumme hat als das letztere.

„Giebt es daher irgend ein Dreieck, dessen Winkelsumme einem gestreckten Winkel gleich ist, so gilt dasselbe von allen Dreiecken. — Denn durch das Aneinanderlegen von vier Dreiecken, welche dem erstgedachten kongruent sind, kann man ein neues Dreieck mit derselben Winkelsumme beschaffen und durch Wiederholung dieses Verfahrens das Feld eines solchen Dreiecks so grofs machen, dafs ein beliebig gegebenes Dreieck ganz hineinfällt und aus diesem Grunde keine kleinere Winkelsumme besitzt."

Hieraus läfst sich nun ableiten, dafs die Winkelsumme im Dreieck einem gestreckten Winkel gleich sein mufs.

Hiermit sind die Arbeiten in Gr. Arch., die diesen Gegenstand behandeln, erledigt; doch findet sich, was nicht unerwähnt bleiben möge, in zahlreichen Rezensionen noch oft Gelegenheit, die vorliegende Frage zu erörtern, und es bieten besonders die Rezensionen des jetzigen Herausgebers der Zeitschrift viele anregende Bemerkungen.

Von erwähnenswerten Abhandlungen mögen an erster Stelle genannt werden die in den „Göttinger Anzeigen" 1816 am 20. April besprochenen von Schwab (Berlin 1814) und Metternich. Es heifst in der Besprechung, die Lücke der Unbeweisbarkeit der Parallelentheorie bestehe thatsächlich. Schwab habe schon vor 15 Jahren einen ähnlichen Versuch veröffentlicht, indem er alles auf den Begriff von Identität der Lage zu stützen suchte. Nach seiner Erklärung seien Parallellinien solche Gerade, die einerlei Lage haben. Sie müssen von einer dritten Geraden notwendig unter gleichen Winkeln geschnitten werden, weil diese Winkel nichts anderes

seien, als das Maſs der Verschiedenheit der Lage dieser dritten Linie von den Lagen der beiden Parallelen.

Hier liege im wesentlichen derselbe Versuch vor. Nach Schwab sei Lage ein bloſser Verhältnisbegriff (Situs est modus, quo plura coëxistunt vel iuxta se existunt in spatio). Man könne wohl sagen, daſs zwei Gerade 𝔄 und 𝔅 eine gewisse Lage gegen einander hätten, die mit der gegenseitigen Lage zweier Geraden ℭ und 𝔇 einerlei sei. Aber Schwab gebrauche das Wort Lage in seinem Beweise als absoluten Begriff, indem er von Identität der Lage zweier nicht koinzidierender Geraden spreche.

Diese Bedeutung sei leer, wenn nicht Identität bestimmt werde und gesagt sei, woran wir sie erkennen.

Soll sie an der Gleichheit der Winkel mit einer dritten erkannt werden, so stehe damit noch nicht fest, ob diese Gleichheit auch bei jeder beliebigen Transversale statthabe: solle die Gleichheit der Winkel mit jeder Geraden das Kriterium sein, so wisse man wieder nicht, ob gleiche Lage ohne Koinzidenz möglich sei.

Ein groſser Teil der Schrift wende sich gegen Kant und behaupte, die Gewiſsheit der Geometrie beruhe nicht auf Anschauung, sondern auf Definitionen und auf dem principium identitatis und dem principium contradictionis.

Daſs von diesen logischen Hülfsmitteln zur Einkleidung und Verkettung der Wahrheiten in der Geometrie fort und fort Gebrauch gemacht werde, habe wohl Kant selbst nicht leugnen wollen: aber es sei sicher, daſs sie für sich ohne lebendige Anschauung nichts zu leisten vermöchten.

Der Versuch Metternich's wird nicht günstiger beurteilt.

Sehr gelobt dagegen wird in den „Göttinger Anzeigen" Jahrg. 1822 die Schrift von Carl Richard Müller, Theorie der Parallelen; nur befinde sich ein schwacher Punkt in Artikel 15 auf S. 15.

Der Verfasser gehe von einem gleichschenkligen Dreieck aus, bei dem jeder Basiswinkel gröſser als der Winkel an der Spitze ist. Es werde dann der Winkel von der Spitze am einen Schenkel angetragen, der gefundene Abschnitt des

anderen Schenkels auf diesem Schenkel abgetragen, wieder der Winkel an der Spitze angetragen u. s. f. — Es werde behauptet, dass die Stücke auf den Schenkeln eine abweichende Progression bilden. Der Beweis des Verfassers sei apagogisch, indem er die übrigen möglichen Fälle, wenn der Lehrsatz nicht wahr wäre, aufzähle und die Unstatthaftigkeit eines jeden zu erweisen versuche. Verfasser behaupte nämlich, dafs unter jener Voraussetzung einer von folgenden 5 Fällen statthaben müsse. Die aufeinander folgenden Stücke wären

1) alle einander gleich,

2) jedes nachfolgende gröfser,

3) einige gleich und das nachfolgende gröfser oder kleiner,

4) einige aufeinander folgende nähmen fortschreitend ab und die darauf folgenden fortschreitend zu,

5) sie seien abwechselnd gröfser oder kleiner.

In dieser Aufzählung sei der mögliche Fall übergangen, dafs die Stücke anfangs fortschreitend zu- und dann fortschreitend abnähmen; dies sei der wichtigste Fall und seine Erledigung die eigentliche Lösung.

Man könne einwenden, dafs er analog dem dritten Falle sei. Aber der Beweis dieses Falles sei gerade verfehlt, indem ganz willkürlich angenommen werde, dafs bei allen gleichschenkligen Dreiecken mit α an der Spitze und gröfserem Winkel an der Basis, wenn mit ihnen die angeführte Konstruktion vorgenommen werde, die Folge der abgeschnittenen Stücke notwendig dieselbe sein müsse, eine Annahme, die doch unmöglich als von selbst evident angesehen werden dürfe.

De undecimo Euclidis Axiomate iudicium. Auctore Andrea Jacobi. — Jena 1824. —

Nach einer kurzen Einleitung, die feststellt, dafs auch in den Fundamenten der Mathematik eine unsichere Stelle sei,[1]) erörtert der Verfasser zuerst den Begriff Axiom.

---

[1]) Lambert 1786 in „Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik“: „Die Frage selbst betrifft nämlich weder die Wahrheit noch die Gedenkbarkeit des elften Euklidischen Grundsatzes, sondern sie bezieht sich blofs darauf, ob dieselbe aus den Euklidischen

„Axioma est propositio categorica, in qua semper notiones fundamentales vel simplicissimae inter se iunguntur, simulque, quae veritas insit eiusmodi coniunctioni, indicatur.“

Dann wird festgestellt, was theorema bedeute.

„Theorema est propositio categorica, in qua semper notiones compositae inter se iunguntur, simulque, quae insit eiusmodi coniunctioni veritas, indicatur.“

An diesen Erklärungen prüft der Verfasser den Satz Euklids und kommt zu dem Resultat, dafs er zu den Lehrsätzen gehöre. Drei Methoden der Abhülfe gebe es: ein neues (anderes) Axiom, eine andere Definition der Parallelen, eine andere Definition der geraden Linie.[1]) Müller mache fünf Klassen der Versuche, was aber nicht richtig sei; Voit drei Klassen.

In folgenden Werken fände sich eine neue Definition der Parallelen, nämlich als Linien von konstantem Abstand. Zugleich hielten die Verfasser diese Definition „per se claram atque a nemine in dubium vocari posse putarunt.“

Wolfius, Elementa matheseos universae. Tom. I. Halae 1730.

Bézout, Cours de mathématiques.

Bossut, Traité élémentaire de Géométrie. — Paris 1777.

Andreae Taquet, elementa Euclidea geometriae planae ac solidae etc. — Romae 1745.

Petri Rami. Arithmet. libri duo, geometriae XXVII. a Lazaro Schonero recogniti. Francofurti 1599.

Postulaten mit Zuziehung seiner übrigen Grundsätze in richtiger Folge hergeleitet werden könne.“ Damit scheint uns in der That der Kernpunkt der Frage getroffen.

[1]) Hier werden zitiert:

Voitius, Percursio conatuum demonstrandi parallelarum theoriam de iisque iudicium. Gottingae 1802.

Ausführliche evidente Theorie der Parallellinien herausgegeben von Johann Wolfgang Müller, Nürnberg 1819. —

Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio. Gottingae 1763. Kluegel.

Wahl, Dissertatio mathematica symbolas ad epicrisin theoriarum parallelas spectantium continens. Jenae 1823. —

Behn, Dissertatio de linearum parallelarum proprietatibus nova ratione demonstratis. — Jenae 1761.

Cataldo, Opusculum de lineis rectis aequidistantibus et non aequidistantibus. Bononiae 1603.

Lüdicke, Versuch einer neuen Theorie der Parallellinien im Zusammenhange mit den Grundlehren der Geometrie. Meiſsen 1819.

Metternich, Vollständige Theorie der Parallellinien. Mainz 1822.

Ouvrier, Theorie der Parallelen. Leipzig 1808.

Jacobi ist durchaus anderer Ansicht und hält die Definition eher für einen Lehrsatz.

Unter denen, die einen Beweis für nötig halten, sei zuerst Clavius (1607) zu nennen. Sein Beweis sei aber wenig tauglich.

Robert Simson (1806) gebe ein neues Axiom, das aber der aufgestellten Definition des Verfassers nicht entspreche.

Ebenso wenig glücklich sei der Versuch Kircher's (Adolph Kircher, Nouvelle théorie des parallèles avec un appendice contenant la manière de perfectioner la théorie des parallèles de A. M. Legendre. Paris 1803).

Auch Vit. Giordano da Bitonto (Euclide restituto overa gli antichi elementi geometrici ristaurati e facilitati, Romae 1680) bemühe sich vergeblich einen Beweis zu liefern, indem er von der Definition ausgehe, parallele Geraden seien solche, die sich weder näherten noch sich von einander entfernten.

Friedr. Gottlob Hanke (Principia theoriae de infinito mathematico et demonstratione possibilitatis parallelarum. Lipsiae 1757) verdiene gar keine Beachtung.

Ebenfalls nehme der Versuch Schweikart's (Die Theorie der Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie, Jena und Leipzig 1807) einen schiefen Ausgang; sein Beweis gehe von dem Satze aus, in jedem rechtwinkligen Viereck seien die gegenüberliegenden Seiten gleich.

Es sei also keinem Mathematiker, der von der Äquidistanz ausgegangen, gelungen, diese Linien wirklich als gerade nachzuweisen. Daher sei diese Definition zu verwerfen.

Auch die Definition, die von den gleichen Winkeln bei einer Transversalen ausgehe, (Vavignon, Élémens des Mathématiques. Paris 1731) sei als ungenügend schon von Kluegel und Voit nachgewiesen.

Der Verfasser geht nun über zu den Versuchen, ein neues Axiom an die Stelle des fraglichen zu setzen. Hier sind zu nennen:

Proclus, In commentariis in lib. I elementorum Euclidis. — Basileae 1533.

Koenig, Élémens de Géométrie contenant les six premiers livres d'Euclides, mis dans un nouvel ordre et à la portée de la jeunesse. — Hagae Com. 1758.

Lorenz, Grundrifs der reinen und angewandten Mathematik. Helmstaedt 1791.

Schwab, Tentamen novae parallelarum theoriae notione situs fundatae. — Stuttgardiae 1801.

Müller, Ausführl. evidente Theorie der Parallellinien. — Nürnberg 1819.

Das Axiom des Proclus lautet:

„Duas lineas rectas mutuo sibi incidentes inde a puncto secandi magis magisque a se recedere, ita quidem, ut earum distantia tandem fiat infinite magna."

Koenig: „Wenn eine Gerade eine von zwei Parallelen schneidet, mufs sie auch die andere schneiden."

Lorenz: „Jede Gerade durch einen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels mufs hinreichend verlängert auch den anderen Schenkel schneiden."

Schwab: „Zwei Gerade, die gleiche Lage gegen einander haben, sind auch gegen eine dritte gleich geneigt."

Schon Kluegel und Hoffmann hätten gezeigt, dafs diese Sätze keine Axiome seien. Aber auch Müller's Axiom sei kein solches.

Es bleibe also noch die dritte Klasse übrig, nämlich die Klasse derjenigen, die einen Beweis des Euklidischen Satzes versucht hätten. Ausführlicher sollen nur die besprochen werden, die den Euklidischen Satz ersetzt haben durch den anderen, dafs in jedem Dreieck die Summe der Winkel zwei Rechte betrage. Hierher gehören:

Legendre, Élémens de Géométrie. Paris 1802.

Hauff, Archiv der reinen u. angew. Mathemat. 9. Heft. 1799. Num. VI.

Thibaut, Grundriſs der reinen Mathematik. ed. III. 1818. Göttingen.

Wolf's Anfangsgründe der reinen Elementar- und höheren Mathematik. — Marburg 1818. (Anonym.)

Ob sie ihren Zweck erreicht hätten, könne man aus Hofmann's und Wohls Abhandlungen sehen. Verfasser will die Fehler dieser Theorieen nicht noch einmal darlegen.[1])

Weitere Versuche rühren her von

Karsten, Mathesis theoretica atque sublimior. Rostock 1760.

Hofmann.

Malezieu, Élémens de Géométrie. — Paris 1721.

Nasarradinus.

Lambert's Versuch sei fast identisch mit dem des Saccherius (Euclides ab omni naevo vindicatus etc. Mediolani 1733).

Kaestner's (Anfangsgründe etc. 1792, S. 204) mit dem von Schmidt (Anfangsgründe der Mathematik. Frankfurt am Main 1797. — S. 131).

Segner, Elementa; Halae 1756.

Lacroix, Élémens etc. Paris 1803.

Hausen, Elementa matheseos. Lipsiae 1734.

Pardies, Élémens etc. Hagae Com. 1705.

Clairaut, Elementa geometrica. — Paris 1741.

Sauveur, Géométrie élémentaire. — Paris 1753.

Camus, Élémens de géométrie. — Paris 1750.

Boscowich, Elementa universae math. — Romae 1752.

Wallisius, opera. —

„parvi vel nullius sunt momenti“.

Jacobi geht dann näher auf Crelle's Arbeit ein, die ungefähr auf dieselben Prinzipien sich stütze, wie die von

[1]) Auch Lambert habe in seiner Theorie der Parallellinien in dem Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik 1786 dies hinreichend nachgewiesen.

Lacroix, und auf Bürger's Theorie. Beide seien verfehlt, ebenso die Abhandlung von Baucker (mufs wohl heifsen Paucker).

Demnach seien alle Versuche als verfehlt zu bezeichnen. Bei der Lektüre aber seien ihm neue Ideen zur Parallelentheorie gekommen, die er nun mitteilen wolle. Dabei geht Jacobi auf die gleiche Richtung der beiden Geraden zurück. Interessant ist hier noch eine philologische Untersuchung über die Bedeutung des Wortes „Parallelen", je nachdem παρά mit Genetiv, Dativ oder Accusativ konstruiert angesehen werde.

Horn, Parallelenproblem. — Glückstadt 1837. (Progr.)

Der Verfasser sieht die Schwierigkeit, das Parallelenproblem zu beweisen, darin, dafs sich „eine Verbindung des Endlichen und Unendlichen findet." Geht man von den endlichen Winkeln aus, so ist der Beweis leicht, nicht aber umgekehrt, wo man von der Unendlichkeit ausgeht. „Hier ist der Standpunkt des Ausgangs nicht fest", daher die Beweisversuche in eine unendliche Reihe auslaufen.

„Weniger strenge Beweise gingen von einem andern Begriffe der Parallellinien aus, indem sie dieselben definierten als solche, die beständig einen gleichen Abstand von einander haben. Allein abgesehen davon, dafs die Konstruktion, also die Möglichkeit solcher Linien nicht von ihnen nachgewiesen ward, konnten sie nicht darthun, dafs alle Nichtparallelen schneidende sind, worauf es doch vorzüglich ankam. Es blieb ihnen immer das Gespenst der nicht sich schneidenden Konvergenten übrig, welches kein Zauberstab bannen konnte."

I.

Versuche, den Knoten zu lösen.

Erste Methode. Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten, so dafs ein Winkel ein rechter, der andre ein spitzer ist, so müssen sich die Linien nähern.

Beweis durch immer kleinere Perpendikel.[1])

Daran schliefst sich der Beweis, dafs die Linien sich

[1]) Nach einer Fufsnote aus: Hoffmann, Die Elemente des Euklid. — Man vergl. Schweikart, Theorie der Parallellinien.

schneiden müssen. — Es folgt dann die Verallgemeinerung (XI. Axiom). — Horn widerlegt diese Beweisart. Es gehe erstens der Beweis von der Anschauung aus, zweitens handle es sich dabei um eine unendliche Annäherung, wodurch der Zweck nicht erreicht werde.

Zweite Methode. In jedem Dreieck beträgt die Winkelsumme zwei rechte Winkel.

Nachweis, dafs nicht gröfser und nicht kleiner als $2R$ nach Legendre.

Auch diese Beweise leiden daran, dafs sie in einer unendlichen Annäherung bestehen.

Dritte Methode. Wenn man auf den Schenkel eines halben rechten Winkels eine Linie zweimal anträgt, so ist ein Perpendikel von dem Endpunkt dieser Linie auf den anderen Schenkel gröfser als die gegebene Linie.[1])

Auch hier ist wieder die unendliche Annäherung störend. Dann aber kommt hinzu, dafs für die inneren Winkel $= 2R$ zwar sich beweisen läfst, dafs die Geraden sich nicht schneiden, aber nicht, dafs sie immer gleichen Abstand haben.

Vierte Methode. Wenn zwei Parallellinien geschnitten werden, so sind die Wechselwinkel gleich etc.

Beweis stützt sich auf die Gleichheit der Lote. Hierzu bemerkt Horn, dafs er den Beweis nur anführe, weil er sich in vielen Lehrbüchern des vorigen Jahrhunderts fände.

Dies sind die vier Hauptwege. Auch andre Versuche. „Von Aufgaben ist man z. B. ausgegangen, ohne zu bedenken, dafs in der Aufgabe nur ein Beweis des Möglichen, nicht aber des Notwendigen liegt.“

II.

Versuche, den Knoten zu zerhauen.

„Man stellte entweder 1) als Grundsatz auf, dafs, wenn zwei gerade Linien einer dritten parallel wären, sie unter sich parallel sein müfsten; oder 2) dafs durch einen Punkt nur eine Linie mit einer andern parallel gezogen werden könne; oder 3) behauptete man, der Euklidische Grundsatz sei in einer einfacheren Gestalt ein solcher.“

[1]) Ebenfalls nach Hoffmann.

Erste Methode. (Nach Grunert's Lehrbuch der ebenen Geometrie.) Für die Schule resp. den Anfänger gute Darstellung, aber nicht streng wissenschaftlich. Der Fehler liegt daran, dafs Grunert parallele Linien und sich nicht schneidende identifiziert, worin gerade die Schwierigkeit beruht.

Zweite Methode. (Nach Tellkampf's Vorschule der Mathematik.) Auch diese weist Horn als unberechtigt zurück.

Dritte Methode. (Nach Hessling, Theorie der Parallellinien.) „Wenn GH und CD von JN geschnitten werden und die Winkel $CML + GLM < 2R$ sind, so ist $G\hat{L}J > C\hat{M}L$, welches sich sehr leicht beweisen läfst. Da nun der gröfsere Winkel $G\hat{L}J$ nicht in dem kleineren $C\hat{M}L$ enthalten sein kann, so mufs GH die CD schneiden."

Obwohl sehr einfach, erfülle er seinen Zweck nicht.

„Da nun bis jetzt alle Beweise für die Paralleltheorie gescheitert sind ...., so fragt es sich: Wie soll man es mit der Parallelentheorie halten? Betrifft die Frage den Unterricht, so ist die Antwort nach dem Standpunkte verschieden. In den mittleren Klassen eine einfache Methode; in den höheren gestehe man den Mangel eines Beweises offen ein. Betrifft aber die Frage die Wissenschaft, dann kann die Antwort nur eine Forderung sein, das Problem zu lösen."

Verfasser zweifelt an der Möglichkeit und hält „den Satz, sowie alles, was sich auf ihn stützt, für eine Hypothese, deren Gültigkeit für unser Leben freilich hinreichend durch die Erfahrung dargethan wird, deren allgemein notwendige Richtigkeit aber ohne Absurdität bezweifelt werden könnte."

J. St. Mill, System der deduktiven und induktiven Logik, übersetzt von Th. Gomperz. Leipzig 1884. (I. Originalausgabe 1843.)

II p. 361: „Man nimmt an, dafs es giebt .... z. B. Parallellinien und dafs diese Linien überall gleichweit von einander abstehen."

Hierzu findet sich folgende Anmerkung: „Die Mathematiker haben es gewöhnlich vorgezogen, Parallellinien nach der Eigenschaft zu definieren, dafs sie in derselben Ebene

liegen und niemals zusammentreffen. Dies macht es jedoch notwendig, noch als ein weiteres Axiom irgend eine andere Eigenschaft paralleler Linien anzunehmen; und das Ungenügende in der Art, wie Eigenschaften zu diesem Zwecke von Euklid und andern gewählt werden, galt stets als der wundeste Fleck der Elementargeometrie. Auch als eine bloſse Worterklärung ist die Äquidistanz zur Bezeichnung von Parallellinien geeigneter, da es die Eigenschaft ist, die wirklich in der Bedeutung des Namens enthalten ist.[1]) Wenn in derselben Ebene liegen und niemals zusammen treffen alles wäre, was wir unter „parallel sein" verstünden, so würden wir es nicht ungereimt finden, zu sagen, daſs eine Kurve ihrer Asymptote parallel ist.[2]) Die Bedeutung von Parallellinien ist: Linien, die genau dieselbe Richtung verfolgen und die daher niemals weder einander näher kommen noch sich von einander entfernen — eine Vorstellung, welche die Betrachtung der Natur uns ohne Weiteres darbietet. Dass die Linien niemals zusammentreffen werden, ist natürlich in dem umfassenderen Satze enthalten, daſs sie überall gleichweit entfernt sind. Und daſs irgend welche gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und nicht äquidistant sind, gewiſs zusammentreffen werden, läſst sich in der strengsten Weise aus der im Text angenommenen Grundeigenschaft gerader Linien beweisen, daſs sie nämlich, wenn sie von demselben Punkte ausgehen, ohne Ende immer mehr und mehr auseinander gehen."

F. Märcker, Theorie der Parallellinien. — Meiningen 1846.

Der Verfasser giebt zuerst eine genaue Darstellung der Geraden und der Ebene, sowie der Beziehungen dieser beiden Raumgebilde. Daran schlieſst sich die Definition der krummen Linien, § 13—15 Planimetrie, § 16—21 die Winkellehre, § 22—24 einiges vom Kreise, § 25—43 von den geradlinigen

[1]) Man vergl. meine Ausführungen weiter oben, sowie die Fuſsnote auf S. 204 No. 3.

[2]) Danach würden auch zwei beliebige Kreise, die sich nicht schneiden, parallel sein; während in Wahrheit doch nur konzentrische Kreise in derselben Ebene als parallel bezeichnet werden dürfen.

Figuren. — Nun kommt der Abschnitt „Von den Parallellinien."

§ 44. Erklärung: „Zwei Gerade in derselben Ebene, die, soweit man sie auch verlängern mag, nie einander schneiden, heifsen Parallelen."

Zusätze. 1) Zwei Lote auf einer Geraden sind parallel.

2) Konstruktion.

3) Auf derselben Seite.[1])

§ 45. Wenn zwei Geraden, auf entgegengesetzten Seiten einer dritten, mit dieser parallel sind, so sind sie einander parallel.

§ 46. „Wenn auf dem einen Schenkel irgend eines spitzen Winkels ein Lot auf der inneren Seite errichtet wird, so schneidet dies genugsam verlängert den andern Schenkel."

Hieran schliefsen sich eine Reihe von Sätzen über Parallelen.

§ 59. „Parallelen haben überall gleichen Abstand. Zus. Lote zwischen Parallelen sind gleich."

Daran schliefsen sich § 60 und 61 die Sätze von der Winkelsumme im Dreieck.

Schulz, Über die Theorie der Parallellinien. Königsberg i. d. Neumark 1846.

§ 1 und 2 enthalten einleitende Betrachtungen.

§ 3. 1) Man hat, an einer rein geometrischen Lösung

---

[1]) Hierzu bedarf man der Erklärungen des § 15: „Von zwei Geraden, die nur einen Punkt, der kein Endpunkt ist, gemein haben, liegen die durch diesen Punkt getrennten Stücke einer jeden auf entgegengesetzten Seiten der andern.

Erkl. a) Solche Geraden schneiden sich. (Durchschnittspunkt, Treffpunkt.)

b) Wenn von zwei Geraden jede ganz auf derselben Seite der andern liegt, so heifst die Seite einer jeden, worauf die andere liegt, die innere, und die, worauf die andere nicht liegt, die äufsere. — (Entsprechende, gleichnamige Seiten.)

c) Eine Gerade, die über beide Endpunkte hinaus, soweit es die Ebene gestattet, verlängert wird, teilt diese in zwei Teile, und keine in der einen befindliche Linie kann in den andern sich erstrecken, ohne die Gerade zu schneiden."

gänzlich verzweifelnd, die Stützen anderswoher zu nehmen gesucht. Hierher gehören die Beweise

a) durch den Satz vom zureichenden Grunde,

b) vermittelst der Einführung des unendlich Kleinen,

c) vermittelst der Drehung.

2) Rein geometrische Versuche, aber nur näherungsweise, selbst ohne Nachweis, dafs man auf dem angefangenen Wege zum Ziele gelangen könne.

3) Man hat andre Erklärungen, als die Euklidischen, von Geraden, Parallelen und Winkeln gegeben.

4) Man hat einen andren Grundsatz aufgestellt, der der unmittelbaren Anschauung näher liegt — oder was richtiger wäre, welcher zugleich aus den Euklidischen Erklärungen von selbst folgt.

5) Der letzte Weg endlich ist der, dafs man gerade darauf ausgeht, entweder jenes ungenügende Axiom selbst als Lehrsatz zu beweisen oder einen andern Satz, aus welchem jenes Axiom, sowie die übrigen Sätze der Parallelentheorie streng logisch folgen.

Die meisten Lösungen gebe es zu 2), 1) und 3), während 4) und 5) noch ungelöst seien.

§ 4. Verfasser geht näher auf den Beweis 1, a) ein und weist nach, dafs der unbewiesene Satz eingeschmuggelt sei, dafs, wenn der innere Winkel gröfser sei als der entsprechende äufsere, sich die Geraden schneiden.

1, b) entziehe sich völlig der einfachen, unmittelbaren Anschauung, auf welche allein Euklid sein System aufbaue.

1, c) sei nicht rein geometrisch. Aufserdem liege ein Fehler in der Annahme, dafs wenn zwei Linien von einer dritten unter gleichen Winkeln geschnitten werden, sie auch von jeder beliebigen andern unter gleichen Winkeln geschnitten würden.[1])

§ 5. Auch der Beweis 2) sei nicht streng; er könne die Sätze höchstens plausibel machen.

---

[1]) Nur für die durch die Mitte der ersten Transversalen gehenden Transversalen sei ein strenger Beweis ohne Hülfe der Parallelentheorie möglich.

§ 6. Der dritte Weg legt andere Erklärungen[1]) zu Grunde. Hier fragt es sich, welches sind die einfachsten geometrischen Begriffe?

Unmittelbar unsrer Anschauung gegeben sei der Raum, er ist also keiner weiteren Erklärung auf geometrischem Gebiete fähig. Durch Unterscheidung, Begrenzung gelangen wir zu Neuem.

Als unterschieden im Raume seien nun für unsere Anschauung — und zwar unmittelbar — nur gegeben die drei Normal-Richtungen[2]) seiner Ausdehnung, die Dimensionen Länge, Breite, Höhe. Diese Namen seien subjektiv. Je nachdem man nun eine, zwei oder alle drei Richtungen zugleich setze, erhalte man Linie, Fläche, Körper. Mit den Dimensionen sei zugleich die gerade Linie und die rechtwinklige Lage der Axen gegeben. Der Punkt als ausdehnungslose Grenze der Linie sei die Negation aller Ausdehnung.

Mit diesen Erklärungen will nun Verfasser den im § 3 bezeichneten vierten Weg einschlagen. Er stellt folgende neue Grundsätze auf:

„1) Nähern sich zwei Geraden, bis sie sich schneiden, so entfernen sie sich vom Schnittpunkt ab ebenso wieder voneinander, aber in umgekehrter Lage.

2) Nähern sich zwei Gerade, so kann sich dies nicht ändern, ohne daſs sie sich geschnitten haben.“

Hierauf baue sich nun die Parallelentheorie ganz streng so auf:

1) Die Summe der Winkel im Dreieck ist nicht gröſser als 2 R.

2) Werden zwei gleiche Lote auf derselben Geraden errichtet und ihre Endpunkte m und n verbunden, so entstehen bei m und n gleiche Winkel.

3) Treffen zwei Gerade a und b eine und dieselbe dritte c

[1]) Erklären heiſst, die einfacheren Elemente des Erklärten aufweisen — und bei den eigentlichen Sacherklärungen, die Entstehungsweise aus diesen Elementen nachweisen. (Die Erklärung muſs auf so einfache Elemente zurückgehen, die als unmittelbar in unserm Wesen beruhend nicht mehr auf einfachere zurückgeführt werden können.)

[2]) Richtung liegt unmittelbar in unsrer Anschauung.

senkrecht, so sind die Lote (*m* und *n*), zwischen *a* und *b* in gleicher Entfernung von *c* errichtet, einander gleich.

4) In demselben Falle von No. 3 kann das Lot *m* (= *n*) nicht kleiner sein als das Lot *c* (d. h. als das zwischen *a* und *b* enthaltene Stück der dritten Linie), weil sonst ein Viereck mehr als 4 *R* enthielte.[1])

5) In demselben Falle (oder auch, gleiche Wechsel- oder gleiche Gegenwinkel. oder supplementäre innere Winkel vorausgesetzt) haben *a* und *b* überall gleiche Entfernungslote.

Mit diesem letzten Satze sei bekanntlich die ganze Schwierigkeit der Parallelen-Theorie gehoben.

Dudeck, Versuch einer folgerechten Durchführung der Lehre von den parallelen Linien.[2]) — Hohenstein 1847.

Es sei zu beweisen:

entweder: „Zwei Geraden können eine solche Lage haben, dafs ihre senkrechten Abstände in allen Punkten gleich sind."

oder: „Zwei Geraden, die auf einer dritten senkrecht stehen, stehen auch gemeinsam auf einer vierten senkrecht."

oder: „Der elfte Euklidische Grundsatz".

Der Verfasser wendet sich 1) zu, indem er von Senkrechten bei einem spitzen Winkel ausgeht.

Schmeisser, Kritische Betrachtung einiger Grundlehren der Geometrie, wie sie in den meisten Lehrbüchern vorkommen. — Frankfurt a/O. 1851.

2) Verfasser rechnet den Parallelismus zu den „ursprünglichen Anschauungen a priori", fälschlich Begriffe genannt. Definition sei nicht möglich. „Jede einfache Vorstellung ist einer Definition[3]) nicht fähig, aber auch nicht bedürftig."

---

[1]) Hier steckt der Grundsatz, der an die Stelle des 11. Axioms tritt.

[2]) Als Litteratur wird angegeben: Hill, Geschichte und Kritik der Parallelentheorieen. Lundae 1844.

[3]) „Der einzige Zweck einer Definition ist, einen denkbaren Gegenstand durch Angabe der den Begriff desselben konstituierenden Merkmale zur Erkenntnis zu führen."

Vergl. Kant, Kritik d. r. Vernunft. p. 316. — Fries, System der Logik. p. 36; 273.

7) Auch der „Parallelismus“ eine Grundvorstellung.

Schon Geminus erkläre die Parallelen für ein Liniengebilde, eine Grundvorstellung wie Kreis, Ellipse etc. (Auch Proklus.)[1])

8) Proklus in Bd. IV. p. 93 seines Kommentars:

„Bei den Parallelen sind drei eigentliche Merkmale anzunehmen, welche sowohl ihr Wesen an sich bestimmen, als auch umgekehrt stattfinden. Sie gelten nicht nur alle drei zugleich, sondern auch jedes abgesondert von den übrigen. Das eine ist, dafs wenn eine Gerade die Parallelen schneidet die Gegenwinkel einander gleich sind; das zweite, dafs die innern zwei Rechten gleich; das letzte, dafs der äufsere dem ihm gegenüberliegenden (Wechselwinkel) gleich ist.

Denn jedes dieser Merkmale gehörig dargestellt zeigt, dafs gerade Linien parallel sind.“

Verfasser bespricht dann, nachdem er den Winkel erörtert hat, die geometrischen Grundsätze, deren er 3 formelle und 3 materielle aufstellt.[2])

15) Das elfte Axiom sei ein Einschiebsel eines Ungeschickten. Über das ganz unnütze Ding, worüber schon seit langer Zeit viel Unnützes geschrieben worden sei, noch etwas zu sagen, sei nicht der Mühe wert.

16) Das zwölfte Axiom sei auch kein Satz, weil das Prä-

---

[1]) Man vergl. J. J. J. Hoffmann, Kritik der Parallelen. Jena 1817. — Allg. Lit. Zeit. v. 1817. Ergänz. Bl. 121; S. 962. — Lambert's Briefwechsel deutscher Gelehrten. Bd. I. p. 23.

[2]) A) Formelle.

1) Zwischen zwei Grenzpunkten ist nur eine gerade aber unzählig viele krumme Linien denkbar.

2) Durch zwei Punkte ist die Lage oder Richtung einer geraden Linie bestimmt; zu der einer krummen aber sind mehrere Bestimmungsstücke nötig.

3) Gerade Linien, ebene Flächen und gerade Körperräume können nicht in sich selbst zurücklaufend gedacht werden, aber krumme.

B) Materielle.

1) Zur Begrenzung einer Linie sind mindestens zwei Punkte;

2) zur Begrenzung einer Ebene drei Gerade nötig, aber nur eine oder zwei Gerade und eine Krumme oder auch nur eine Krumme.

3) Die Begrenzung eines Körperraums erfordert mindestens vier ebene Flächen etc.

dikat darin die Bedingung der Möglichkeit der Begrenzung einer Fläche blos verneine.

Die Euklidischen „Axiome" seien überhaupt sämtlich keine „Axiome", sondern nur „allgemeine Aussprüche".

Im Abschnitt III spricht Schmeisser Über die logische Anordnung der Lehren der Elementargeometrie. Der Parallelismus wird ganz am Anfang abgehandelt.

Krueger „Ueber die Lehre von den Parallelen, namentlich in Bezug auf neuere Lehrbücher.[1]) — Bromberg 1852.

Verfasser geht aus von Euklids Definition und stellt dann folgende Klassen von Beweisversuchen auf:

1) Man suchte das elfte Axiom direkt zu beweisen.

2) Man stellte einen andern Satz als Grundsatz auf.

3) Man suchte Lehrsätze, die sich bei Euklid auf die Parallelenlehre stützen, unabhängig davon zu beweisen und darauf die Sätze von den Parallelen zu gründen.

4) Man gab andere Definitionen von Parallelen, aus denen man entweder mit einem Grundsatz oder ohne einen solchen die Eigenschaften dieser Linien ableitete.

Folgende Definitionen seien neu aufgestellt worden[2]):

1) Eine Linie ist parallel mit einer Geraden, wenn alle ihre Punkte von der Geraden gleichweit abstehen.

2) Zwei Gerade, welche gleiche Entfernung von einander haben, sind parallel.

3) Zwei Geraden sind parallel, wenn sie mit einer dritten sie schneidenden gleiche Winkel in demselben Sinne bilden.

4) Zwei Gerade sind parallel, wenn sie gleiche (dieselbe) Lage haben.

5) Zwei Gerade sind parallel, wenn sie gleiche (dieselbe) Richtung haben.

---

[1]) Man vergl. S. Sohnke, Die Parallelen, in Encyklopädie von Ersch und Gruber.

[2]) Hoffmann, Kritik der Parallelentheorieen. Jena 1817. — Gilbert's Geometrie nach Legendre. — Bertrand, Legendre, Thibaut. Grunerts Archiv Bd. 15.

Zuerst bespricht Verfasser Legendre's Theorie und giebt seine Beweise wieder, dann verschiedne andre Versuche.[1])

In den neueren Lehrbüchern seien die drei letzten Definitionen bevorzugt; so gebe von Swinden die dritte. E. Gottfr. Fischer (Berlin 1833) gehe von der zweiten Definition aus, ähnlich verfahre Schlömilch. Es komme immer noch ein Grundsatz hinzu. Alle hätten den Begriff der gleichen oder ungleichen Richtung.

Verfasser kritisiert die verschiednen Beweisversuche und verfällt dabei in den groben Fehler, Richtung mit Ziel zu verwechseln.

Es werden ferner kritisiert Snell, der sehr abfällig beurteilt wird, Kossack (desgl.), Schmeisser (desgl.), Koppe, Nagel.

Verfasser vermifst überall die nötige Strenge, wie sie sich bei Euklid finde (Kunze ausgenommen). Durch einige Änderungen in der Reihenfolge der Sätze und Definitionen sei Euklids Darstellung zu retten. Die Definition der Parallelen müsse auf Satz 27 folgen, das elfte Axiom nach Satz 17.

„Aber ich glaube, dafs die Strenge der geometrischen Methode weniger in der vollkommnen Evidenz der Grundsätze selbst liegt, welche doch immer eigentlich Lehrsätze sind, aber für einen gewissen Standpunkt als erste gelten müssen; als vielmehr in der Art und Weise, wie die ersten Sätze angewendet werden: in der Sicherheit und Geschicklichkeit, mit welcher die Lehrsätze und Aufgaben auf die Definitionen, Axiome und Postulate zurückführt werden. Und in dieser Beziehung müssen Euklids Elemente als Muster von geometrischer Strenge und Evidenz gelten."

Schulz, Theorie der Parallellinien. — Königsberg 1854.

Zuerst rekapituliert der Verfasser seine frühere Abhandlung (s. o.) und verbreitet sich dann ausführlich über Gerade und Richtung, die er „im wesentlichen" identifiziert. § 5

---

[1]) Kunze (sehr anerkennend); Wolff; Brettner; Klügel; Ramus; Streit; Wiegand.

handelt von dem „Abhängigkeitsverhältnis zwischen Winkelgröfse und Schenkelrichtung". Hier finden sich folgende Sätze:

„Haben zwei Geraden keinen Punkt gemein, so kann die Verschiedenheit oder Gleichheit ihrer Richtungen nicht unmittelbar erkannt werden, sondern mittelbar mit Hülfe einer dritten."

„Weichen zwei Geraden unter gleich grofsen Winkeln von einer und derselben dritten nach derselben Seite hin ab, dann haben diese zwei Geraden eine gegenseitig gleiche Richtung."

§ 6 bringt dann eine Lösung nach der dritten Methode (vergl. die frühere Abhandlung), § 7 eine Lösung nach der vierten Methode, indem an Stelle des Euklidischen Axioms das folgende aufgestellt wird: „Nähern sich zwei Gerade, so müssen sie im Annähern verharren, so lange sie an derselben Seite nebeneinander herlaufen".

§ 8 giebt dann einen Rückblick.

Lotz, Ueber die Theorie der Parallelen.[1] — Fulda 1862.

I) Euklids Lehre.

II.

Sätze aus andren Theorieen.

Erste Gruppe.

1) Sind die von zwei bel. Punkten einer geraden Linie auf eine zweite gefällten Senkrechten gleich, so stehen sie auch auf der ersten Geraden senkrecht und schneiden von beiden gleiche Stücke ab.

2) Steht eine von irgend einem Punkte einer Geraden auf eine zweite gefällte Senkrechte auch auf der ersten senkrecht, so mufs auch jede andere von der ersten auf die zweite gefällte Senkrechte auf der ersten senkrecht stehen und der ersten Senkrechten gleich sein; auch die Stücke auf der Geraden sind gleich.[2])

3) Sind die von zwei Punkten einer Geraden auf eine zweite gefällten Senkrechten ungleich, so bilden sie mit der

---

[1]) Vergl. Hoffmann, Kritik der Parallelentheorie. Jena 1817. — Klügel, Göttingen 1763.

[2]) Beweis aus 1.

ersten Geraden innere Gegenwinkel, von denen der an der gröfsern Senkrechten spitz, der an der kleinern aber sein stumpfer Supplementwinkel ist.[1])

4) Bildet eine von irgend einem Punkte einer Geraden auf eine zweite gefällte Senkrechte mit der ersten ungleiche Nebenwinkel, so ist jede andere von irgend einem Punkte der ersten Geraden auf die zweite gefällte Senkrechte gröfser oder kleiner als die erste, je nach der Lage des Punktes.[2])

5) Werden zwei Gerade von bel. vielen andern durchschnitten, und sind von den Gegen- und Wechselwinkeln, welche jene beiden mit einer bel. von diesen bilden, irgend zwei korrespondierende oder Wechselwinkel gleich oder zwei Gegenwinkel Supplemente, so gilt dies auch bei den übrigen durchschneidenden Linien.[3])

Zusatz: Die drei Winkel eines Dreiecks betragen zusammen zwei Rechte.

6) Wie in 5, nur ungleich.[4])

7) Werden zwei Gerade von bel. vielen andern durchschnitten und bildet eine der schneidenden mit einer Richtung der durchschnittnen Linien innere Gegenwinkel, die kleiner als zwei Rechte sind, während die andern von der ersten Geraden gleiche Stücke abschneiden und auf der zweiten senkrecht stehen, so müssen diese in der oben angegebenen Richtung aufeinander folgenden Senkrechten um gleiche Stücke abnehmen und auf der zweiten Geraden gleiche Stücke abschneiden.

Zusatz 1. Schneidet man von dem einen Schenkel eines Winkels Stücke ab, die sich verhalten wie 1 : 2 : 3 : 4 .... und fällt von ihren Endpunkten Senkr. auf den andren Schenkel, so verhalten sich diese Senkr. und die von ihnen auf dem andern Schenkel abgeschnittnen Stücke wie 1 : 2 : 3 : ....[5])

Zusatz 2. In jedem Schenkel eines jeden, wenn auch noch so kleinen Winkels läfst sich immer ein Punkt nicht nur so bestimmen, dafs die von ihm auf den andern Schenkel

---

[1]) Beweis aus 1. (Hülfslinien und Kongruenz von Dreiecken.)

[2]) Beweis indirekt aus 1 und 3 oder direkt aus 1.

[3]) Beweis mit Hülfe von Satz 2. (Kongruenz von Dreiecken.)

[4]) Beweis aus der Winkelsumme im Viereck.

[5]) Beweis unmittelbar aus dem Hauptsatz.

gefüllte Senkr. gröſser wird als jede geg. Linie, sondern auch so, daſs die Senkrechte vom andern Schenkel ein Stück abschneidet, welches gröſser ist als jede geg. Strecke.[1])

III.

1 bis 4 sind Hauptsätze, 5 und 6 Verallgemeinerungen, 7 mit seinen Zusätzen Anwendungen auf spezielle Fälle.

Alle Sätze problematisch, da der erste problematisch.

Es wird dann gezeigt, daſs sich von allen Sätzen immer nur ein Teil beweisen läſst. Legendre's Beweis von Zusatz zu 5 wird u. a. auch als circulus nachgewiesen.

IV.

Neue Gruppe von Sätzen:

8) Sind die von zwei Punkten einer Geraden auf eine zweite gefällten Lote einander gleich, so muſs ihnen auch jedes andere von der ersten auf die zweite gefällte Lot gleich sein.[2])

9) Sind die von drei Punkten, die auf derselben Seite einer Geraden liegen, auf diese gefällten Lote gleich, so geht jede durch zwei dieser Punkte gezogne Gerade auch durch den dritten.[3])

10) Sind die von zwei Punkten einer Geraden auf eine zweite gefällten Lote gleich und liegt ein dritter Punkt auf derselben Seite der zweiten Geraden wie die erste, aber nicht in der letzteren, so muſs das von ihm auf die zweite Gerade gefällte Lot kleiner oder gröſser sein als jedes der beiden ersten je nach der Lage.[4])

Zusatz: Die drei Eckpunkte eines Dreiecks können nicht gleichweit von einer Geraden entfernt sein.

11) Sind die von zwei Punkten einer geraden Linie auf eine zweite gefällten Lote einander gleich, ist aber die von einem dritten Punkte, welcher auf derselben Seite der zweiten

---

[1]) Aus Zusatz 1.

[2]) Beweis aus 1 und 2 oder aus 1 allein. Umgekehrt: Beweis von 1 aus 8.

[3]) Beweis aus 1 oder aus 8. — Beweis von 1 aus 9, von 8 aus 9.

[4]) Beweis aus 1 und 4. — Beweis aus 9, 9 indirekt aus 10.

Linie liegt wie die ersten, auf die zweite Linie gefällte Senkr. gröſser oder kleiner als jede beiden gleichen ersten, so kann dieser dritte Punkt nicht in der ersten geraden Linie liegen, und zwar muſs er zwischen beide gerade Linien oder auſserhalb derselben fallen, je nach der Länge des Lots.[1]

12) Sind zwei von einer Geraden auf eine zweite gefällte Lote ungleich, und ist ein drittes Lot auf der zweiten Geraden einer der beiden ersteren gleich, so muſs der Endpunkt des dritten Lotes zwischen beide Geraden oder auſserhalb fallen je nach der Länge.[2]

13) Sind zwei Lote ungleich, so ein drittes ebenfalls ungleich je nach der Lage.[3]

14) Sind zwei resp. Lote ungleich, so werden die Lote von dem gröſsren nach dem kleinern hin immer kleiner, umgekehrt gröſser.[4]

V.

Kritische Betrachtung.

Clavius nimmt Satz 9 als Grundsatz an. — Verschiedne andre suchen ihn zu beweisen. — Dabei werden offen oder verdeckt irgendwelche von den in III. und IV. geg. Sätzen benutzt.

VI.

Anwendung auf die Parallelentheorie.

VII.

Zwei neue Wege: neue Grundsätze oder neue Definitionen.

Erste Gruppe.

1) Vom ersten oder letzten Schnitt.

Weder Kästner, der den Grundsatz des ersten oder letzten Schnitts aufstellte, noch die Anwender haben ihn als bestimmten Satz hingestellt.

---

[1]) Beweis aus 1 und 3 oder indirekt aus 9 und 10 oder direkt allein aus 9 oder direkt aus 8. — 11 indirekt aus 8.

[2]) Beweis aus 1 und 3 oder aus 11 und 10. — 8 und 11 folgen, 8 indirekt, 11 direkt, aus 12.

[3]) Beweis aus 3 und 4, 12 und 10, 8 indirekt aus 13.

[4]) Beweis aus 13.

Es werden nun die Grundsätze des letzten und ersten Schnitts aufgestellt.[1])

2) Der Grundsatz der ersten oder letzten Senkrechten (von Legendre).

Zweite Gruppe.

3, a) Wenn zwei Gerade auf der nämlichen Ebene einerlei Lage gegeneinander haben, so haben sie auch die nämliche Lage gegen jede dritte Gerade.[2])

3, b) Wenn zwei Gerade gegeneinander verschiedene Lage haben, so haben sie auch verschiedene Lage gegen jede dritte.

Was heifst einerlei Lage gegeneinander haben?

4, a) Wenn zwei Gerade eine gleiche Richtung haben, so müssen beide auch gleiche Richtung gegen jede andere Linie haben.

4, b) Zwei Gerade, die keinen Richtungsunterschied haben, können auch keinen Richtungsunterschied gegen irgend eine andre Gerade haben.

Bézout und Thibaut bewegten sich im Zirkel.

Keiner von den Sätzen dieser Gruppe kann zu der vollen Gewifsheit erhoben werden, welche die Mathematik erfordert.

Dritte Gruppe.

5) Zwei Gerade, welche derselben dritten parallel sind, müssen auch untereinander parallel sein.

6, a) Eine Gerade, welche eine von zwei parallelen Geraden durchschneidet, mufs auch die andre durchschneiden.

6, b) Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden läfst sich mit dieser nur eine Parallele ziehen.

Vierte Gruppe.

7) Durch einen innerhalb eines hohlen Winkels liegenden Punkt läfst sich immer eine Gerade ziehen, welche beide Schenkel schneidet.

8) Jede Gerade, welche durch einen innerhalb eines hohlen

---

[1]) Es handelt sich um das Verschieben einer Geraden auf den Schenkeln eines Winkels und die Lage der Schnittpunkte.

[2]) Von Schwab herrührend.

Winkels liegenden Punkt geht, schneidet wenigstens den einen Schenkel des Winkels.[1])

Verfasser giebt nun seine Parallelentheorie, die er auf die Winkeldefinition (unendl. Ebenstück) stützt.

Parallelen sind solche gerade Linien, die mit derselben dritten, der Richtungslinie, gleiche korrespondierende bilden.

Satz I. Parallelen schneiden sich nicht.

Satz II. Nichtparallele Linien schneiden sich und zwar auf der Seite der Richtungslinie, auf welcher ein äufserer Winkel gröfser ist als sein innerer korrespondierender.[2])

Satz III. Linien, welche sich nicht schneiden, sind in Bezug auf jede Richtungslinie parallel.

Satz IV. Über schneidende.

Thiermann, Geometrische Abhandlung über Erklärungen, Forderungen und Grundsätze nebst einer elementaren Begründung der Lehre von den parallelen Linien. — Göttingen 1862.

Nach ausführlicher Behandlung des Begriffes „Grundsatz“ spricht sich Verfasser dahin aus, dafs der zehnte, elfte und zwölfte Grundsatz Euklids zu den Lehrsätzen gehören. P. Voit wolle den Zusammenhang zwischen dem elften Axiom und dem 17. Lehrsatz entdeckt haben. Das sei nicht richtig. Schon Proclus sage Lib. 3. pet. 5: eius (petitiones) conversum Euclides etiam tamquam theorema ostendit. Auch Borellius weifs das. (Vergl. Eucl. restit. p. 38.)

Verfasser spricht sich gegen die philosophischen und besonders gegen die mathematischen Versuche aus, das elfte Axiom durch eine ganze Reihe andrer zu ersetzen. — Trotzdem seien diese Arbeiten nicht ohne Wert. — Falsche Definition der Parallelen.

Hinweis auf J. J. J. Hoffmann und E. Külp.

Borellius: Et patet, hanc passionem esse valde remotam et incomprehensibilem. nam extensio illa infinita ad utramque partem absque concursu concipi non potest; neque conveniens

---

[1]) Durch einen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels läfst sich keine Gerade ziehen, die nicht wenigstens einen Schenkel schneidet.

[2]) Dazu 4 Beweise.

est, ut a passione remota difficili, et non evidenter cognita deducantur in propos. 27, 28, 29 aliae passiones magis manifestae.[1])

„Eine negative Definition ist also jedenfalls zu vermeiden; denn entweder ist sie nicht bestimmt oder, sollte sie dies sein, so kann sie eine positive Form annehmen."

Verfasser acceptiert die Definition des Posidonius: Parallele Linien sind solche, die überall gleiche Abstände haben.[2])

Der Nachweis der Darstellbarkeit solcher Linien ist noch nicht geliefert.[3])

Begründung der Lehre von den Parallelen.

$BA \perp AC$; $DB \perp BA$.

Es wird zunächst gezeigt, dafs wenn BD und AC auch nur bei einer kleinen endlichen Strecke gleichweit von einander abstehen, sie überhaupt parallel sind.[4])

Dann wird gezeigt, dafs gleich anfangs die beiden Geraden parallel sind. Der übrige Gang ganz wie bei Euklid. Schliefsl. XI. Axiom.

Die wichtigsten Versuche, gleichweit abstehende Linien nachzuweisen.

Clavius schliefst aus der Definition der Geraden, dafs eine Linie, deren sämtliche Punkte von einer Geraden gleichen Abstand haben, eine Gerade ist. — Die Analogie mit dem Kreis wird noch ausgeführt.

Borellius schliefst sich an Clavius an, definiert Parallele als Geraden von gleichem Abstand.

Ebenso Kircher; J. K. J. Hauff; Bossut.

Saccherius stelle drei Hypothesen auf vom rechten, stumpfen und spitzen Winkel, und wolle zeigen, dafs die zweite und dritte falsch sind. Der Versuch sei als mifslungen zu bezeichnen.

---

[1]) Müller, Ausführliche und evidente Theorie der Parallellinien. — Nürnberg 1819.

[2]) Einwurf des Ign. Hoffmann.

[3]) Einwurf des Hieron. Saccherius.

[4]) Vergl. Clavius; Kircher; J. Hoffmann.

Robert Simson: Eine gerade Linie kann nicht erst einer andern geraden Linie näher kommen und sich dann von derselben entfernen, ohne sie vorher geschnitten zu haben u.s.w. (Grundsatz.)

Metternich kurz abgewiesen.

J. C. Schwab gründet seinen angeblichen Beweis auf die Identität der Lage; Herbert auf die der Richtung.

Witte, Die Parallelentheorie und die Definition des Winkels. — Wolfenbüttel 1867.

Eine Begründung der Parallelentheorie mufs sich stützen auf die Begriffe: gerade Linie und Winkel.

Sehr eigentümliche Definitionen: „Der ebene Winkel ist ein Teil einer Ebene, der von zwei beliebigen Richtungen eines Punktes in derselben begrenzt ist.“[1])

Fresenius, Die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft. — Wiesbaden 1868.

Im § 10 kommt der Verfasser auf die Parallelen zu sprechen, von denen es drei Erklärungen gebe,

a) Geraden ohne Schnittpunkt,

b) Geraden mit konstantem Abstand,

c) Geraden von gleicher Richtung.

Was die erste Erklärung betreffe, so sei sie der Vorstellung nicht zugänglich; aufserdem sei dies eine negative Eigenschaft. Die zweite Erklärung beruhe auf einer abgeleiteten Eigenschaft. — Was schliefslich die dritte Erklärung anlange, so sei zu bemerken, dafs Gleichheit nur bei Gröfsen möglich sei. Hier komme der Konflikt zwischen Quantität und Richtung zum Austrag. Richtung sei kein quantitativer Begriff, aber sie sei der Veränderung, Bewegung (Drehung) fähig und diese Veränderung sei vermehrbar oder ver-

---

[1]) Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques. — Genève 1778. Schulz-Königsberg, Entdeckte Theorie der Parallelen. 1784.

minderbar, also quantitativer Natur, daher der Messung zugänglich.[1])

Bei diesen Betrachtungen gelte es, die Richtung von ihrem Ausgangspunkte in der Vorstellung abzulösen.

Man habe in einer Geraden von verschiedenen Ausgangspunkten identische Richtung. Nun nehme man gleiche Drehungen vor, dann habe man sicher auch gleiche Richtungen.[2]) Die neuen Schenkel seien parallel.

Mit dieser Ableitung der Parallelen sei zugleich die Vorstellung der gleichen Winkel mit der Schneidenden gegeben. Auch die Zugehörigkeit der Parallelen zu einer Ebene liege schon in dieser ihrer Genesis.

A. Dauber, Die Grundlagen der Mathematik. — Helmstedt 1871.

Der Verfasser kommt im Verlauf seiner sehr lesenswerten Abhandlung auch auf die uns hier interessierenden Fragen zu sprechen.

Die verschiedenen Geraden können quantitativ gleich sein, der Unterschied der Lage also nur in qualitativer Beziehung. Dieser qualitative Unterschied heifst ihre Richtung.

„Gerade von gleicher Richtung heifsen parallel." Der Richtungsunterschied zweier Geraden von verschiedener Richtung, durch Drehung um den Schnittpunkt innerhalb der Ebene erzeugbar, heifse Winkel.

„Der Winkel als der anschauliche Ausdruck der vollzogenen Richtungsänderung enthält zwar an sich nur formelle Konstruktionselemente, hat aber doch den Charakter einer Gröfse (virtuelle Raumgröfse)."

Man könne nun von der Gleichheit der Richtungen rückschliefsen auf den gleichen Unterschied gegen jede dritte.

---

[1]) Man vergl. unsere Ausführungen in Kapitel I, § 1 und in Kapitel II.

[2]) Denn es gelten die logischen Axiome:

„1) Gleiches wird durch die nämlichen Veränderungen in wieder Gleiches verwandelt."

„2) Was durch die nämlichen Veränderungen zu Gleichem geworden ist, mufs vorher gleich gewesen sein."

A. Germann, Studien zur Lösung der Parallelentheorie. — Ehingen 1872.

Nach einer Reihe von geometrischen Axiomen und Erklärungen, wie z. B. der Raum ist unterschiedslos, d. h. durch eine einfache Lagenänderung ohne Veränderung von Entfernungen findet keine Anderung der geometrischen Eigenschaften statt, geht Verfasser von Kugel und Kreis aus, konstruiert die Ebene als geometrischen Ort der Schnittkreise kongruenter Kugelflächen und gelangt so zu den Eigenschaften der Ebene. Die Gerade ist der Schnitt zweier Ebenen. Berührung zwischen Geraden und Ebenen ist unmöglich. Dann folgen die Sätze über die parallelen Ebenen und Geraden, die darauf ausgehen, dafs parallele Ebenen überall gleichweit von einander abstehen.

Vering, Über die Definitionen des Winkels und der Parallelen. — Neufs 1872.

Verfasser verteidigt zuerst die Einführung der Bewegung in die geometrischen Betrachtungen und wendet die Bewegung[1]) an, um „mittelst derselben zu klarer Auffassung und richtiger Erkenntnis der Raumgebilde" zu gelangen.

Auch bei den Parallelen komme man mit Gröfsenvergleichung nicht aus; es müsse der Begriff der Richtung, also Bewegung hinzugezogen werden.

Drei mögliche Definitionen der Parallelen gebe es, die sich aus ihren Eigenschaften ergeben:

1) Parallele schneiden sich nicht.

2) Parallele haben gleichen Abstand.

Diese Erklärung habe zwei Vorzüge; sie sei erstens positiv und zweitens bleibe sie im Endlichen.

3) Zwei Gerade heifsen parallel, wenn sie mit einer dritten nach derselben Seite hin gleiche Winkel bilden.

Hier müsse die dritte Linie als bestimmt vorausgesetzt werden.

Die Parallelenlehre müsse zwischen der Winkel- und

---

[1]) Bewegung natürlich ohne Rücksicht auf Stoff, Kraft und Zeit.

Dreieckslehre abgehandelt werden. Es liefsen sich noch folgende Definitionen aufstellen:

4) Zwei Gerade, welche in einer Ebene gleiche Richtung haben, heifsen parallel.

5) Zwei Gerade heifsen parallel, wenn die eine sich ohne Drehung in die Lage der andern bringen läfst.

Obwohl der Verfasser die Schwäche dieser Definition, die doch die Parallelverschiebung implicite enthält, erkennt, giebt er ihr doch den Vorzug vor den anderen, weil nur eine Richtung in Betracht zu ziehen ist, und entwickelt aus ihr die in den andern Definitionen berührten Eigenschaften in Form von Lehrsätzen.

Leinemann, Die Theorie der parallelen Geraden. — Münster 1874.

A. Die bisherigen Theorieen.

Verfasser spricht sich gegen die Erklärung des Nichtschneidens aus. — Das Nichtschneiden sei z. B. bei Kurven durchaus kein Grund für ihre parallele Lage — und will von dem überall gleichen Abstand ausgehen.

Andre erklärten eine parallele Gerade als eine solche, welche ohne eine Schwenkung zu machen in die Lage einer andern übergehen könne.

Die Dreieckslehre sei vor der Parallelenlehre abzumachen, weil der Ausgangspunkt naturgemäfs von drei Geraden und zwar von drei sich schneidenden Geraden sei. (Der Parallelenfall ein spezieller.) — Aus pädagogischen Gründen werde aber der andere Weg eingeschlagen.

B. Versuch einer naturgemäfsen und rationellen Theorie.

I. Fundamentierende Sätze über rechte Winkel und Normalabstände.

Hier werden die Sätze abgehandelt, dafs es in einem und von einem Punkte nur ein Lot gebe, dafs das Lot dem spitzen Winkel der schrägen gegenüberliegt. Ferner

„Sind von zwei an der nämlichen Seite einer Geraden liegenden Punkten aus Senkrechte auf dieselbe herabgelassen, so bildet die Verbindungslinie dieser Punkte Winkel mit den Senkrechten, deren Summe gleich zwei Rechten ist.“

Dieser Satz, der also das Axiom enthält, das als Ersatz des elften von Simon z. B. aufgestellt wurde, wird mit Hülfe von Drehung nach Art des Thibaut'schen Beweises bewiesen.

„Wenn zwei von einer Geraden auf eine andre herabgelassene Lote gleich sind, so bilden sie auch rechte Winkel an den Ausgangspunkten."

Beweis durch Umklappen um ein gedachtes Mittellot.

„Wenn zwei Verbindungslinien zweier Geraden lauter rechte Winkel mit ihnen bilden, so sind die ersteren gleich."

Indirekter Beweis.

„Eine begrenzte Gerade hat lauter gleiche senkrechte Abstände von einer Geraden, wenn ihre Endpunkte von der andern gleiche Abstände haben."

„Dies gilt nicht für eine krumme oder eine gebrochene Linie."

„Auch eine unbegrenzte Gerade kann so liegen, dafs alle von ihr aus auf eine zweite zu fällenden Lote gleich sind."

II. Die Parallelenlehre selbst.

„Erklärung: Eine unbegrenzte Gerade ist zu einer andren parallel, heifst, ihre senkrechten Abstände von derselben sind gleich."

Es folgen nun eine Reihe von Lehrsätzen, die alle auf Grund der in I. aufgestellten Sätze ausführlich bewiesen werden, zum grofsen Teil indirekt. Diese Sätze sind:

„Senkrechte auf der einen Parallelen sind auch auf der andern senkrecht, folglich auch die zweite der ersten parallel."

„Zwei Lote auf derselben Geraden sind parallel."

„Durch einen Punkt giebt es zu einer Geraden nur eine Parallele."

„Zu zwei sich schneidenden giebt es keine gemeinsame Parallele."

„Sind zwei Gerade zu einer dritten parallel, so sind sie auch unter einander parallel."

Dann folgen die Sätze, die über die Winkel bei einer Transversalen durch die Parallelen handeln. Als letzter Satz schliefslich:

„Zwei Parallelen können sich nicht schneiden.“

III. Von den Nichtparallelen.

Dieser Abschnitt giebt zuerst die Umkehrungen der Winkelsätze und schliefst dann ab mit dem Satz:

„Sich trotz aller Verlängerung nicht schneidende Geraden derselben Ebene sind parallel.“

Die vorliegende Abhandlung kann recht als ein Typus gelten für die vergebliche Mühe, einen Beweis für das Parallelenaxiom zu liefern.

Günther, Der Thibaut'sche Beweis für das elfte Axiom, historisch und kritisch erörtert. — Ansbach 1877.

Thibaut's Beweis stützt sich auf das Axiom, dafs die drehende Bewegung unabhängig sei von der progressiven.

Zuerst geht Günther darauf ein, ob die Eigenschaft der geraden Linie, nach einer vollen um einen ihrer Punkte vollzogenen Umdrehung in sich selbst zurückzukehren, als bekannt vorausgesetzt werden dürfe. Thibaut's eigne Erklärung schliefse die Eigenschaft nicht ohne weiteres in sich.

Thibaut's Versuch habe nicht die ihm gebührende Anerkennung gefunden.

Kunze gebe den Beweis in seinem Lehrbuche — offenbar unabhängig von Thibaut —, indem er sich einfach auf die unmittelbare Anschauung berufe.

Gründlicher, aber um nichts exakter sei Germar's Versuch in Grunert's Archiv, von dem Günther eine gedrängte Inhaltsübersicht giebt.

In neuerer Zeit habe nur der Leitfaden von Fischer-Schröder den Thibaut'schen Beweis. Er stütze sich auf folgende beiden Axiome.

„I. Ein Strahl, der eine gegebene Richtung verläfst, kann auf eine Ebene, ohne rückläufig zu werden, durch keine einfachere und kürzere Bewegung in seine ursprüngliche Lage zurückkommen, als durch eine volle Umdrehung um seinen Anfangspunkt als festen Scheitel.

II. Ein Strahl kann durch keine einfachere und kürzere Bewegung aus einer gegebenen Richtung in die entgegen-

gesetzte gelangen als dadurch, dafs er um seinen Anfangspunkt einen gestreckten Winkel beschreibt."[1])

Infolge dieser Doppelannahme zerfalle der Beweis in zwei Teile, deren erster mit demjenigen Thibaut's übereinstimme, während der zweite neu sei und deshalb spezielle Beachtung verdiene.

Der Verfasser geht dann auf die fundamentale Identität der Grundgedanken von Thibaut und Grafsmann ein.

Es folgt sodann der kritische Teil, der auf folgende drei Fragen Beantwortung sucht:

„1) Involvieren sämtliche Beweisversuche, die wir besprochen, ein und dieselbe unbewiesene stillschweigend angenommene Voraussetzung, und durften sie diese Annahme mit Recht machen?

2) Wie läfst sich diese Schwäche, wenn sie sich als solche erweisen sollte, beseitigen, so dafs den Anforderungen mathematischer Strenge wie auch pädagogischer Erfahrung möglichst entsprochen werde?

3) Kann endlich die Behauptung, das jedenfalls notwendig werdende Axiom sei „eine Folgerung aus dem Fundamentalprinzip unserer Raumanschauung", Anspruch auf Berechtigung erheben?"

Ad 1) Die Mechanik behandle die Vertauschung von Translation und Rotation nicht als Axiom, sondern als — allerdings leicht zu beweisendes — Theorem. Der Beweis gehe auf die Gleichheit der Gegenseiten im Parallelogramm zurück.

Ad 2) Ein Axiom ist nötig nach allgemeiner Übereinstimmung. Im Interesse des Unterrichts liege es, sich zu einigen. Verfasser schlägt folgendes vor:

„Eine aus ihrer ursprünglichen Richtung herausgerückte und dann in ein und derselben Ebene willkürlich bewegte Gerade hat, sobald sie in ihre Anfangslage zurückgelangt ist, jedenfalls eine Drehung von m vollen Winkeln ($= 360^0$) zurückgelegt, unter m eine willkürliche ganze Zahl verstanden."

Zweierlei sei klargestellt, dafs der Beweis von Thibaut's

---

[1]) Man vergl. S. 214.

Prinzip auf die Parallelensätze zurückgehe, dafs aber andrerseits dieser oder ein ähnlicher Grundsatz aufserordentliche Vorzüge für die Didaktik der Elementargeometrie besitze.

Die Beantwortung der Frage 3) hänge aufs engste mit dem Begriffe des Axioms zusammen. Verfasser geht an der Hand von Erdmann's bekanntem Werke näher auf die Frage ein und kommt dazu, Frage 3) zu verneinen.

Zum Schlufs spricht Günther die Hoffnung aus, „dafs die Geometrie des Raumes für das alte Kreuz der Geometer noch ein anderes Hülfsmittel finden werde, als jenes der blofsen Resignation im Gauss'schen Sinne."

Günther giebt am Schlusse seiner Abhandlung noch eine Zusammenstellung der Literatur, die wir hier ebenfalls mitteilen wollen, wenn auch viele der Werke schon an anderen Stellen von uns mitgeteilt, zum teil auch ausführlich benutzt worden sind.

1) Legendre, Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles, Mémoir de l'acad. royale des sciences. Tom. XII. S. 370 ff.

2) Mansion, Sur le premier livre de la géométrie de Legendre à propos de quelques traités récents, Revue de l'instruction publique 1870. S. 317 ff.

3) Pietzker, Hoffm. Zeitschr. VII., S. 470.

4) Günther-Sparagna, Sulla possibilità di demostrare l'assioma delle parallele mediante considerazioni geometriche, Battaglini's Giornale di matematica. Vol. XI. S. 11.

5) Gauss, Göttinger Gelehrte Anzeigen 1822. S. 1727.

6) Thibaut, Grundrifs etc. Göttingen 1818.

7) Hankel, Die Entwicklung der Mathematik etc. Tübingen 1869.

8) Günther, Ziele und Resultate der neueren math.-hist. Forschung. — Erlangen 1876.

9) Becker, Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage. Berlin 1877.

10) Kunze, Lehrbuch der Geometrie. — Jena 1841.

11) Germar, Die Wichtigkeit etc. in Grunert's Archiv. Bd. XV. p. 361 ff.

12) Fischer's Lehrb. der Planimetrie von Schröder Nürnberg 1870.

13) Helmholtz, Über die Thatsachen etc. Gött. gel. Anz. 1868.

14) Schlegel, System der Raumlehre. Leipzig 1872.

15) v. Wolf, Anfangsgründe etc. Halle 1710.

16) Kästner, Anfangsgründe etc. Göttingen 1792.

17) Grunert, Lehrbuch der Eb. Geometr. — Brandenburg 1869.

18) Killing, Uber einige Bedenken etc. Hoffm. Zeit. Bd. VIII. p. 220.

19) Erdmann, Die Axiome der Geometrie. — Leipzig 1877.

20) Helmholtz, Pop. wiss. Vortr. — III. Heft. — Braunschweig 1876.

21) Günther, Kritik der Raumtheorieen von Helmholtz und Schmitz-Dumont. — Zeitschrift f. d. Realschulwesen. 1. Jahrg. p. 410 ff.

22) Hoüel, Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles dit postulatum d'Euclide. — Bordeaux 1869.

23) Baltzer, Über die Hypothesen der Parallelentheorie. Crelle's Journal, Bd. 83. p. 372 ff.

24) Genocchi, Lettre à Mr. Quetelet sur diverses questions mathématiques. — Bull. de l'acad. Belg. XXXI, S. 181 ff.

25) De Tilly, Reponse sur cette lettre. Ibid.

26) Hoffmann, Die Prinzipien des I. Buchs etc. — H. Z. III, p. 121.

Polster, Geometrie der Ebene.[1]) — Würzburg 1878.

In einer Vorstufe schickt Verfasser eine Reihe von Sätzen über die Gerade voraus, deren Definition er nach Euklid gegeben hat.

Solche Sätze sind z. B.: „Eine Gerade ist an jedem Punkte

---

[1]) Man vergleiche desselben Verfassers „Versuch einer Parallelentheorie" in Blätter für das Bair. Gymn.- und Realschulwesen. — Jahrgang 1877.

gerade." „Eine Gerade kann nicht in sich zurücklaufen." Es folgt dann die Definition:

„Eine unbegrenzte Gerade von bestimmter Art ihrer Lage und nach bestimmter Reihenordnung der in ihr liegenden Punkte heifst Richtung," an die sich wieder Sätze anschliefsen, wie die folgenden:

„Alle Punkte einer Geraden liegen in derselben Richtung."

„Jede Richtung hat von Punkt zu Punkt dieselbe Form."

„Eine Strecke wird durch Verschiebung verlängert."

„Alle Richtungen sind unter sich kongruent."

Es folgt dann ein Abschnitt über die gegenseitigen Lagen gerader Linien in einer Ebene. Definition 3 lautet:

„Zwei Gerade, deren Richtungen in derselben Ebene liegen, ohne einander zu schneiden, heifsen parallele Geraden oder Zeilen."

Das dritte Kapitel dieses Abschnittes „Theorie der Konvergenz und des Parallelismus" bringt u. a. 10 Kriterien der Konvergenz (alle im wesentlichen identisch mit dem elften Axiom) und vier Kriterien des Parallelismus, woran sich die Sätze über die Winkel an der Transversalen anschliefsen.

Zwei Anhänge betrachten dieselben Sätze wie Kapitel 3) im wesentlichen von demselben Gesichtspunkte aus.

Most, Neue Darlegung der absoluten Geometrie etc. Coblenz 1883.

Von Gauss ausgehend schildert Verfasser das Verhältnis der absoluten Geometrie zu den Einzelgeometrieen. Hauptsatz der absoluten Geometrie sei: „Die Inhalte der Dreiecke verhalten sich wie die Abweichungen ihrer Winkelsummen von zwei Rechten."

Dafs der ebene Raum unendlich gedacht werden müsse, darüber entscheide nur eine für die ebene Raumform charakteristische Voraussetzung, sei es, dafs die Linien konstanten Abstandes gerade seien, sei es, dafs es wirklich in aller Strenge ähnliche Figuren gebe.

Es folgen Betrachtungen über den absoluten Raum und werden eine Reihe von Sätzen entwickelt.

Dann heifst es: „Eine Linie, welche von einer Geraden

überall denselben Abstand hat, wird Parallele der Geraden genannt; es ist selbstverständlich damit nicht gesagt, dafs diese Linie eine Gerade sein soll.“

Die Abhandlung schliefst mit dem interessanten Nachweis, dafs die verschiedenen Geometrieen — pseudosphärische, Euklidische, sphärische — im Unendlichkleinen übereinstimmen.

A. Schmitz, Aus dem Gebiete der nichteuklidischen Geometrie. — Neuburg a. D. 1884.

§ 1. Das elfte euklidische Axiom.

Bertrand's Beweis wird unter Zurückweisung von Lüroth's (Schl. Z. Bd. 21) Einwürfen als unrichtig bezeichnet, weil sowohl Winkelfelder als Parallelstreifen etwas Unendliches seien.

Legendre's Beweis sei ein circulus (petitio principii.)

Thibaut's Beweis setze ein anderes, allerdings auch unsicheres Axiom an die Stelle des elften.

§ 2. Die Geometrie von Lobatschewsky-Bolyai.

1) Betrachtungen über die unendlich fernen Punkte.

Parallele Gerade können als solche betrachtet werden, die sich in einem unendlich fernen Punkte unter einem unendlich kleinen Winkel schneiden.

2) Erklärung von „Parallelwinkel zur Distanz OA“ (Abstand). Sätze über die Parallelen.

3) Über die Winkelsumme im Dreieck.

4) Über die Beziehungen zwischen der Winkelsumme des Dreiecks und der Dreiecksfläche.

5) Über den Abstand von parallelen und nicht parallelen Geraden.

6) Krumme Linien (Schnittpunkte; Grenzlinie; Linie gleichen Abstandes).

§ 3. Die Unbeweisbarkeit des elften Axioms.

Die absolute Geometrie liefere den Beweis, dafs das elfte Axiom keine Folge der übrigen sei, sondern dafs der Inhalt desselben nur durch Erfahrung gewonnen werde.

§ 4. Die Bedeutung der hervorragendsten an die Geometrie von Lobatschewsky sich anschliefsenden Arbeiten.

Literatur: Battaglini, giornale di matematiche Bd. V. (1867.)

Beltrami (von Hoüel übersetzt). in annales scientifiques etc. — Bd. VI. (1868.)

Klein, Math. Annalen Bd. 4, 6, 7.

Beez, Math. Annalen Bd. 7.

Schlömilch's Z. Bd. 20, 21, 24.

§ 5. Riemann's und Helmholtz' Grundsätze.

Unser Raum der einzig mögliche und denkbare.

Die Dreidimensionalität und die Unendlichkeit besitze absolute Gewifsheit. Ebenso besitze das elfte Axiom absolute Gültigkeit, es spreche eine wesentliche Eigenschaft des Raumbegriffes aus. Es sei unbeweisbar — unabhängig von den übrigen Axiomen — aber es konstituiere gemeinsam mit den übrigen den Raumbegriff.

§ 6. Philosophische Konsequenzen für die Definition des Raumbegriffs.

Dieser Abschnitt schliefst mit folgenden Definitionen:

„1) Raum ist ein Begriff, durch welchen die Möglichkeit der Koexistenz der Körper ausgedrückt wird.

2) Es existieren feste Körper, deren räumliche Verhältnisse durch drei Hauptrichtungen bestimmt sind; diese sind vollkommen frei nach den drei Richtungen hin beweglich, die Beweglichkeit kann jede beliebige Geschwindigkeit und Dauer haben.

3) Zwischen zwei Punkten giebt es nur einen kürzesten Weg — die Gerade.

4) Das elfte Euklidische oder ein demselben äquivalentes Axiom."

H. Vogt, Der Grenzbegriff in der Elementar-Mathematik. — Breslau 1885.

Sage man von Parallelen, sie haben einen Punkt im Unendlichen gemein, so trete ein Widerspruch zwischen Attribut und Prädikat hervor; das Sichnichtschneiden werde als ein besonderer Fall des Sichschneidens gefafst, nämlich als ein Schneiden in unendlicher Entfernung; es werde die im Gattungsbegriffe liegende Negation zum Artmerkmal gemacht.

Die richtige Erkenntnis werde gewonnen durch richtige Auffassung der Grenzbegriffe und durch die Methode des Einschliefsens in Grenzen.

Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie des Mafses. — Braunschweig 1887.

Ich mufs mich begnügen auf diese Arbeit hinzuweisen, da ein Zitieren aus ihr nicht gut angängig ist. Für unsere Frage kommen in Betracht § 111 u. f. § 118 bringt die appellative Definition:

„Geraden der Ebene, welche sich nicht schneiden, heifsen Parallelen."

Von Bedeutung sind ferner § 131 u. f., besonders § 136.

Beez, Über Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie. — Plauen 1888.

Nach einer wertvollen, historischen Einleitung behandelt § 1 die Definitionen Euklids, § 2 die Forderungen und Axiome Euklids. Dieser Paragraph ist es, der unser besonderes Interesse in Anspruch nimmt.

Schon die alten Philosophen gingen in ihren Ansichten über Axiome und Forderungen weit auseinander.

Verfasser bezeichnet mit Liebmann die Axiome als Denknotwendigkeiten, die Forderungen als Anschauungsnotwendigkeiten. Zwei Fundamentalsätze, über deren Einordnung die verschiedenen Ausgaben Euklid's schwanken, will er näher betrachten:

1) das sogen. elfte Axiom,

2) den Satz: Zwei Geraden schliefsen keinen Raum ein.

Beez beginnt mit Satz 2, den Proklus unter die Axiome gerechnet habe. Dafür gelte es noch heute; Zweifel sei aber nicht ausgeschlossen, da es sich um Unendliches handle, das der Anschauung verschlossen sei. Eine logische Notwendigkeit sei der Satz nicht, eine Anschauungsnotwendigkeit nur innerhalb des eng begrenzten Gebietes unsrer Anschauung. (Analogie mit den gröfsten Kreisen auf der Kugelfläche.) — Es wird dann auf den Zusammenhang mit dem ersten Satze

eingegangen, dessen merkwürdige Stelle im System betont wird. Auch er sei keine Denknotwendigkeit, aber auch, daſs er eine Forderung sei, werde von Proklos bis auf Gauss bestritten. An seine Stelle lieſse sich setzen „Durch einen Punkt auſserhalb einer Geraden kann nur eine Parallele gezogen werden“ oder „die Winkelsumme im Dreieck beträgt $2R$.“ Man habe andere Definitionen der Parallelen aufgestellt, aber immer wieder sei man auf einen Satz gestoſsen, der nicht bewiesen werden konnte, obwohl Jeder ihn für richtig halten muſste. Verfasser verweist auf den Artikel „Parallel“ von Sohnke in der Encyklopädie von Ersch und Gruber, in der von Proklus bis auf Gräf (1837) 92 verschiedene Schriftsteller aufgeführt würden. Sohnke mache drei Kategorieen: 1) Neue Definition; 2) Neues Axiom; 3) Besondere Auffassung der Geraden und des Winkels.

Zum Schluſs dieses Paragraphen spricht sich Beez noch gegen die Definition der Parallelen als Geraden von gleicher Richtung aus.

Im § 3 behandelt Beez „die Nicht-Euklidische Geometrie.“ Hier sind die ersten Ausführungen noch für uns von Interesse.

Von Gauss datiere eine neue Auffassung der Sache, daſs nämlich die Versuche, das elfte Axiom zu beweisen, deshalb ohne Erfolg bleiben müſsten, weil durch dasselbe den übrigen Axiomen eine Voraussetzung beigefügt werde, die nicht notwendig mit ihnen verbunden zu sein brauche.

Verfasser geht näher auf die absolute Geometrie ein (zwei Parallelen durch einen Punkt möglich), kommt auf die Flächenuntersuchungen und das Krümmungsmaſs zu sprechen und würdigt ausführlicher Beltrami's Arbeiten. Er schlieſst diese Erörterungen mit den Worten:

„Durch das Vorhergehende ist die Möglichkeit einer Geometrie, in welcher das Euklidische Axiom keine Geltung hat, dargethan und damit erwiesen worden, daſs dasselbe nicht als eine Folge der übrigen Euklidischen Axiome d. h. als ein Theorem anzusehen ist, wie Gauss zuerst erkannt hat. Wir können den betreffenden Satz aber auch nicht für eine Forderung d. h. eine Anschauungsnotwendigkeit halten, ebenso



wenig für ein Axiom d. h. eine Denknotwendigkeit; er ist vielmehr, ganz so wie der andere Satz „zwei Gerade schliefsen keinen Raum ein" eine Voraussetzung, zu welcher uns die spezifische Beschaffenheit des empirischen Raumes nötigt."

Prof. Dr. Lindemann, Über die Hypothesen der Geometrie. Separat-Abdr. a. d. Schriften d. Physik.-ökon. Gesellsch. zu Königsberg in Pr. Bd. XXXII. 1891. Sitzungsber. p. 20.

Nach unseren Anschauungen schneiden sich in der Ebene gerade Linien in einem Punkte oder sie sind parallel. Hat aber die Fläche, auf der wir zeichnen, eine Krümmung wie die Erdoberfläche, so schneiden sich Linien, die den Geraden entsprechen, z. B. Meridiane in zwei Punkten (z. B. den Polen) und es giebt keine Parallelen. Dadurch tritt neben der gewöhnlichen oder euklidischen Planimetrie die Zeichnung auf der sphärischen Fläche mit ganz anderen, aber ebenso widerspruchsfreien Resultaten auf. Eine dritte neue Auffassung erhalten wir, wenn wir auf einer sattelförmigen Fläche zeichnen. Der Vortragende erläuterte solche Betrachtungen an Modellen und knüpfte daran die folgenden Erörterungen.

Das sogenannte Parallelenaxiom (eigentlich das fünfte Postulat in Euklids Elementen) hat schon seit dem Altertum die Mathematiker und Philosophen vielfach beschäftigt. Die aufgeworfene Frage ist die, ob dieses Postulat eine logische Folge der übrigen von Euklid aufgestellten Definitionen, Postulate und Axiome sei, oder nicht, d. h. ob der Inhalt dieses Postulates nicht vielmehr unter die Lehrsätze, als unter die Postulate (bezw. Axiome) gehöre. Die Versuche, einen Beweis für das Postulat zu erbringen, sind fast ebenso zahlreich gewesen, wie diejenigen, welche zur geometrischen Lösung der Quadratur des Kreises gemacht wurden, und ebenso vergeblich. Erst durch die Arbeiten von Gauss, Bolyai, Lobatschewsky (ca. 1835), Riemann (1854), v. Helmholtz (1870) ist man in unserem Jahrhundert sich darüber vollkommen klar geworden. Da alle versuchten Beweise mifsglückt waren, lag es nahe, einen indirekten Weg einzuschlagen: War das fragliche Postulat ein Lehrsatz, so stand zu erwarten, dafs man zu inneren Widersprüchen geführt werde, falls man

dasselbe durch ein anderes Postulat ersetzte und auf Grund eines solchen mathematische Schlüsse zu machen suchte.

Eine unmittelbare Folge des fünften Postulates von Euklid ist der Satz, dafs man in der Ebene durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden nur eine Parallele ziehen könne. Gauss, Bolyai und Lobatschewsky nahmen im Gegensatze dazu an, dafs zwei solche Parallelen möglich seien, und zeigten, dafs die dann zu ziehenden Folgerungen zwar mit unserer Anschauung, aber nicht unter sich in Widerspruch stehen. Die so aufzubauende, in sich konsequente Geometrie, welcher in der Wirklichkeit die uns bekannten Figuren nicht entsprechen, ist unter dem Namen der absoluten oder nichteuklidischen Geometrie besonders durch die populären Vorträge von v. Helmholtz allgemein bekannt geworden. Bei dem nicht mathematischen Publikum ist sie gleichzeitig nur allzu oft verkannt worden; insbesondere haben zahlreiche und angesehene Philosophen ihretwegen den Mathematikern den Vorwurf eines unklaren Mystizismus gemacht, aber nur deshalb, weil sie nicht die nötigen Vorkenntnisse besafsen, um Zweck und Sinn der nichteuklidischen Geometrie zu verstehen. Ob der Inhalt eines Satzes beweisbar oder nicht beweisbar ist, mufs für die Mathematik als eine Frage fundamentalster Wichtigkeit erscheinen. Wenn wir zur Entscheidung dieser Frage etwas Unmögliches voraussetzen (nämlich durch die erwähnte Abänderung des Parallelenaxioms), so thun wir nichts anderes, als in der Mathematik bei jedem indirekten Beweise geschieht; und nur offenbarer Unverstand kann ein solches Vorgehen bei dieser einen Frage verwerfen, während es bei so vielen anderen in Gebrauch ist. Das Wesen der indirekten Beweise beruht darauf, dafs aus einer gemachten Annahme mathematische Schlüsse gezogen werden, deren Inhalt mit bereits sonst bewiesenen mathematischen Sätzen im Widerspruche steht, so dafs dadurch die Unzulässigkeit der gemachten Voraussetzung erhellt. Man hätte also erwarten müssen, dafs auch die nicht euklidische Geometrie zu einem mit den sonstigen Voraussetzungen der Geometrie nicht verträglichen Resultate führe. Dem ist aber nicht so; allerdings könnte man denken, dafs bei hinreichend weit fortgesetzter

Ausführung dieser Geometrie sich ein solcher Widerspruch ergeben müsse, dafs diese Ausarbeitung bis heute nur noch nicht weit genug geführt sei; denn der aus einer unmöglichen Voraussetzung zu folgernde Widerspruch braucht nicht sogleich auf der Hand zu liegen, wird vielmehr oft erst durch sehr weitläufige Schlüsse erkennbar. Derselbe darf aber auf keinen Fall aus der Anschauung entnommen werden; denn die wissenschaftliche Geometrie hat eben die Aufgabe, aus wenigen unbewiesenen (meist der Anschauung entnommenen) Sätzen durch logische Verknüpfung dieser Sätze neue Resultate abzuleiten, ohne von neuem sich auf die Anschauung zu berufen.

Thatsächlich liegt die Frage nach neueren Untersuchungen aber so, dafs man in der nichteuklidischen Geometrie nie zu einem solchen Widerspruche gelangen kann. Es ist das grofse Verdienst Felix Klein's, hierauf hingewiesen zu haben; nach ihm nämlich läfst sich jedem Satze der nichteuklidischen Geometrie ein anderer (aus dem Parallelenaxiom ableitbarer) Satz unserer gewöhnlichen Euklidischen Geometrie derartig an die Seite stellen, dafs der letztere notwendig falsch sein müfste, wenn ersterer einen Widerspruch enthielte. Sollte daher die nichteuklidische Geometrie nicht in sich widerspruchsfrei sein, so müfste auch unsere gewöhnliche Geometrie falsch sein; es würde dann alle geometrische Forschung unmöglich. Hiermit ist endgültig bewiesen, dafs es unmöglich ist, das sogenannte Parallelenaxiom zu beweisen; und dieses mit Hülfe der viel geschmähten nichteuklidischen Geometrie gewonnene Resultat giebt uns erst definitiv die unentbehrliche feste Grundlage aller geometrischen Untersuchung. Leider scheint es noch immer nicht hinreichend bekannt zu sein, denn es giebt noch immer elementare Lehrbücher, in denen falsche Beweise des Parallelenaxioms reproduziert werden.

Auch auf Grund der Untersuchungen von Riemann und Beltrami über das sogenannte Krümmungsmafs des Raumes kann man ähnliche Folgerungen ziehen; dieselben sind aber insofern nicht einwurfsfrei, als es bei ihnen an einer rein geometrischen Definition der dabei benutzten Koordinaten

fehlt; gleiches gilt in Bezug auf die Helmholtz'schen Entwickelungen.

Es ist ferner von Klein darauf hingewiesen worden, daſs man unter Anlehnung an gewisse Betrachtungen v. Staudt's zur direkten Begründung der analytischen Geometrie gelangen kann, ohne dabei irgend welche metrischen Sätze zu benutzen. Vom Vortragenden ist dieser Gedanke neuerdings eingehend durchgeführt, und mag deshalb auf die kürzlich von ihm herausgegebenen „Vorlesungen über Geometrie, zweiter Band, erster Teil" verwiesen werden. Die Klein'sche Methode führt direkt zur Begründung aller „rein projektivischen" Sätze, von denen auch sonst bekannt war, daſs sie in der nicht euklidischen Geometrie unveränderte Gültigkeit haben. Erst in der metrischen Geometrie, das heiſst bei Einführung der für jene Gesetze notwendigen Begriffe der Entfernung und des Winkels beginnt der Unterschied beider Arten von Raumlehre.

Wenn man daran festhält, daſs bei einer „Bewegung" jeder Punkt wieder in einen Punkt, jede gerade Linie wieder in eine gerade Linie übergehen soll (womit auch ausgesagt ist, daſs die unendlich fernen Elemente auch unendlich fern bleiben sollen), so bleiben (vergl. die Ausführungen a. a. O.) drei Möglichkeiten übrig, die miteinander gleich berechtigt sind, und zwischen denen nur eine neue Erfahrungsthatsache entscheiden kann, nämlich: 1. die gewöhnliche Euklidische Geometrie, 2. die schon von Gauss studierte nicht euklidische Geometrie und 3. eine zweite Abart der letzteren, deren Möglichkeit von Riemann zuerst bemerkt wurde, und bei welcher die Existenz einander paralleler Linien überhaupt geleugnet wird.

Besonders hervorzuheben ist, daſs man bei letzterer Geometrie den Satz, daſs zwei Punkte eine Gerade immer fest bestimmen, nicht notwendig fallen zu lassen braucht, wie von Helmholtz, Benno Erdmann und vielen anderen irrtümlicher Weise behauptet ist; es sind vielmehr zwei weitere Unterfälle zu unterscheiden, je nachdem man diesen Satz beibehalten will oder nicht.

So sind wir jetzt nach Jahrtausenden fortgesetzter Arbeit endlich zu der sicheren Erkenntnis gekommen, daſs an den

Grundlagen der Geometrie, wie sie Euklid festgelegt hat, nicht zu rütteln ist, dafs er mit bewundernswertem Scharfsinn richtig handelte, indem er den Inhalt des fünften Postulates eben als Postulat und nicht (wie unzählige seiner Nachfolger) als Lehrsatz gab.

Ergänzend mag hier bemerkt werden, dafs die Parallelentheorie in den beiden elementaren Lehrbüchern von Mehler (6. Auflage 1889) und Baltzer (5. Auflage, Leipzig 1878), welche in unserer Provinz vorwiegend in Gebrauch zu sein scheinen, der Hauptsache nach richtig behandelt ist. Bei Mehler geschieht dies allerdings in so knapper Form, dafs die richtige Erfassung des Sachverhaltes besondere Aufmerksamkeit erfordert; wenigstens habe ich bei den Prüfungen der Lehramtskandidaten die Erfahrung gemacht, dafs die betreffende Stelle bei Mehler nur selten richtig verstanden wird. In § 9 nämlich (Seite 6) wird durch das bekannte Umlegungs-Verfahren der Satz bewiesen, dafs die beiden von einer dritten geschnittenen Linien parallel sind, wenn zwei Gegenwinkel gleich sind, wodurch (gemäfs der in § 8 gegebenen Definition paralleler Linien), nur ausgesagt ist, dafs sich die beiden Linien, beliebig weit verlängert, nicht schneiden. Es wird meist übersehen, dafs dieser Satz nicht umkehrbar ist; erst durch den bei Mehler im § 10 aufgestellten Grundsatz, nach welchem man durch einen Punkt zu einer gegebenen Geraden nur eine (nicht unendlich viele, wie nach § 9 noch denkbar wäre) Parallele ziehen kann, wird die Umkehrbarkeit des Satzes erreicht. Der im § 9 gegebene Beweis involviert gleichwohl noch eine nicht ausdrücklich hervorgehobene Voraussetzung, nämlich (wie ich a. a. O. p. 550 näher erörtert habe) diejenige, dafs die Ebene durch eine beliebige gerade Linie in zwei völlig getrennte Teile zerlegt werde. Nur durch das stillschweigende Hinzufügen dieser Annahme gelingt es bei Mehler, die oben erwähnte dritte Möglichkeit (die elliptische Geometrie) auszuschliefsen, während die zweite Möglichkeit (die hyperbolische Geometrie) durch den angeführten Grundsatz beseitigt wird.

Bei Baltzer (a. a. O. p. 12) ist der Gedankengang ein ganz analoger. Nur ist die Definition von Parallelen eine andere und in sofern weniger gute, als die Worte „unendlich

ferne Punkte“ in ein Elementarbuch nicht hineingehören; sie richten hier nur, wie ich bei den Prüfungen zur Genüge erfahren habe, Verwirrung an. Die zuletzt erwähnte stillschweigende Voraussetzung ist auch bei Baltzer gemacht; da durch diese die elliptische Geometrie schon ausgeschlossen ist, hat man nur noch die Wahl zwischen zwei (nicht, wie auf S. 13 behauptet wird, zwischen drei) verschiedenen Geometrieen.

M. Simon, Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie. — Strafsburg 1891.

Verfasser kommt in § 8 seiner höchst lesenswerten und gediegnen Arbeit, die volle Vertrautheit mit seinem Gegenstande erkennen läfst, auf „das Parallelenaxiom“.

Von den zahllosen Versuchen es zu beweisen will Simon nur die vier verbreitetsten besprechen von Legendre, Thibaut, Bertrand und den direkten.

Legendre gehe von der stillschweigenden Voraussetzung aus, dafs die gerade Linie unendlich lang sei und dafs daher zwei Gerade nur einen Punkt gemeinsam hätten. Die Annahme, dafs man durch jeden Punkt im Innern eines Winkels eine Gerade ziehen könne, welche beide Schenkel schneidet, sei nur eine andere Form des Parallelenaxioms.

Der Thibaut'sche Beweis sei von Günther[1]) als eine Folge des Parallelenaxioms nachgewiesen.

Der Bertrand'sche Beweis, der wohl die meisten Anhänger gefunden, sei von Schmitz[2]) in einer Unhaltbarkeit schlagend nachgewiesen worden.

„Der direkte Beweis aus der „unmittelbaren Anschauung“ ist derselbe, der auf der Kugel zeigt, dafs das sphärische Dreieck seinem Exzefs gleich ist.“

„Aus seiner Umkehrung ist unzweifelhaft das Parallelenaxiom bei Euklid hervorgegangen.“

„Dafs der Schein auch bei diesem Beweis trügt,“ weist der Verfasser in längerer Betrachtung nach.

---

[1]) Vergleiche unser Zitat.

[2]) Vergleiche unser Zitat.

Hiermit will ich die Zitate aus besondren Werken schliefsen, denn das Eingehen auf verschiedene andere Arbeiten, besonders — neben den Originalarbeiten — auf die Veröffentlichungen von Pietzker würde mich zu weit führen und von dem eigentlichen Zwecke des vorliegenden Werkes zu weit entfernen. Doch will ich nicht unterlassen, gerade auf die Arbeiten Pietzkers besonders hinzuweisen: ist er ja doch zur Zeit wohl der energischste Vertreter der Richtung, die sich mit den Untersuchungen der Nicht-Euklidischen Geometrie nicht befreunden kann. Allerdings wird ihm von gegnerischer Seite der Vorwurf nicht erspart, sich in Mifsverständnissen zu befinden: aber dieser Vorwurf ist jener Seite so geläufig[1]), dafs Jemand geneigt sein könnte, die vielen Mifsverständnisse als Beweis anzusehen, dafs ein rechtes Verständnis überhaupt nicht möglich ist.

Ich lasse übrigens, ehe ich die Zitate aus den Lehrbüchern bringe, hier noch ein Verzeichnis von Schriften folgen, die sich besonders den neueren, an Parallelentheorien anknüpfenden Ansichten widmen, wobei ich von den Aufsätzen in den Mathematischen Annalen und Crelle's Journal, sowie in den eigentlichen mathematischen Zeitschriften des Auslandes absehe. Zu nennen sein würden hier besonders Klein, Killing, Schur, Lipschitz, Beltrami, Lie, Engel.

Das Verzeichnis macht durchaus keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

P. Duchemin, Des parallèles dans l'espace. Droites et plans parallèles. — Avranches.

P. Duchemin, Théorie des parallèles et certitude de la géométrie — Coutances.

P. Duchemin, Théorie des parallèles sans postulatum et certitude de la géométrie. — Coutances.

L. C. Dadgson, Curiosa Mathematica. Part. I.: A new theory of parallels. — London.

---

[1]) Man lese nur die Schriften von Klein, Lie, Lindemann etc., so wird man mit Erstaunen wahrnehmen, wie oft diese Vertreter der Nicht-Euklidischen Geometrie sich gegenseitig — aber auch noch andern z. B. Helmholtz — den Vorwurf machen, mifsverstanden worden zu sein.

L. Liard, Des définitions géométriques et des définitions empiriques. — Nouvelle édition. — Paris.

A. Sannia ed. E. d'Ovidio, Elementi di Geometria. — Napoli.

R. Betazzi, I postulati e gli enti geometrici. — Roma.

H. Poincaré, Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie. — S. M. F. Bull. XV.

J. Petersen, Om Mathematikers Grundbegreber. Bewis for Sätningen om Trekantens Winkelsum. Tidskrift for Math. — Kopenhagen.

J. Carbonelle, Les incertitudes de la géométrie. — Revue de qu. sc. 14.

H. Wehr, Die Subjektivität des Raums und des 11. Axioms Euklids. — Wien.

E. Beltrami, Saggio di Interpretazione della Geometria Non-Euklidea. — Napoli 1868.

Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher. (Angefügt von J. Hoüel seiner Übersetzung von Lobatschewsky's Parallelentheorie.) — Paris 1866.

E. Rouché et Ch. de Comberousse, Traité de Géométrie. — Paris 1883. — p. 553. Note II: „Sur la géométrie non euclidienne.“ (Besonders wertvoll auch die reiche Litteraturangabe.)

La science absolue de l'espace. Indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'axiome 11 d'Euclide par J. Bolyai. Précédé d'une notice sur la vie et les traveaux de W. et de J. Bolyai par M. Fr. Schmidt. — Paris 1868.

Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie. II. Bd. — Leipzig.

Frischauf, Absolute Geometrie nach Bolyai. — Leipzig 1872.

N. Lobatschewsky, Theorie der Parallellinien. 2. Aufl. — Berlin 1887.

M. Simon, Die Elemente der Geometrie, mit Rücksicht auf die absolute Geometrie. — Strafsburg 1890.

Hauff, Lehrbegriff der reinen Mathematik. — Frankfurt a/M. — 1803.

p. 155 wird der Satz von der Winkelsumme im Dreieck aufgestellt und weitläufig indirekt bewiesen, wobei natürlich versteckte Axiome unterlaufen.[1])

In einer Anmerkung (p. 163) bemerkt der Verfasser, daſs dieser Lehrsatz der Grundstein der Euklidischen Geometrie sei. Euklid habe an Stelle seines 16. Satzes den Beweis vom 32. gesucht und darin gefehlt, daſs er ein unberechtigtes Axiom aufgestellt und einen Satz von einem andern hergeleitet habe, während gerade das umgekehrte stattfinden müsse.

p. 193—202 wird auf die Parallelenlehre näher eingegangen.

Schweins, System der Geometrie. — Göttingen 1808.

p. 6: „Die Richtung einer Linie, in Beziehung auf die Richtung einer andern Linie gedacht, wird ihre Lage genannt. Diese kann nun eine solche sein, daſs sich die Linien .... nicht durchschneiden .... die parallele Lage."

Richtungsbeweis.[2])

Bertrand, Élémens de Géométrie. — Paris 1812.

p. 12: „Théorème: Lorsque les angles intérieurs sont égaux à deux droits, les droites qui les font sur une troisième, ne se rencontrent pas."

Beweis durch Kongruenz der Halbstreifen.[3])

„Premièrement, on dit de deux lignes, qui tracées sur le même plan ne s'y rencontrent pas, qu'elles sont Parallèles."

---

[1]) Das ist überhaupt der Fehler aller sogenannten Beweise, daſs sie an irgend einer Stelle ein Axiom enthalten, das an sich ebensowenig anschaulich ist wie das von Euklid aufgestellte.

[2]) Unter „Richtungsbeweis" verstehe ich den Gang, daſs zwei Richtungen gleich sind, wenn sie gegen eine dritte gleichen Richtungsunterschied haben oder umgekehrt.

[3]) Dieser Beweis wird vielfach angefochten, weil man offene Figuren nicht zur Deckung bringen dürfe. Mir scheint dieser Einwand hinfällig, denn dann dürfte man ja auch Winkel nicht zur Deckung bringen und

Bézout, Cours de Mathématiques. — Paris 1812.

p. 16: „Deux lignes droites, tracées sur un même plan, sont dites parallèles, lorsqu'elles ne peuvent jamais se rencontrer, à quelque distance qu'on les imagine prolongées.

Deux lignes parallèles ne font donc point d'angle entre elles.

Donc deux parallèles sont partout également éloignées l'une de l'autre; car il est évident que si en quelqu'endroit elles se trouvaient plus près qu'en un autre, elles seraient inclinées l'une à l'autre, et que par conséquent elles pourraient enfin se rencontrer."

Es folgen dann die Sätze über die Winkel bei Parallelen. —

In den angefügten Noten bemerkt Reynaud p. 7: „Bézout donne une définition exacte des parallèles, mais il ne demontre pas rigoureusement les propriétés de ces lignes. De sorte que les démonstrations des nos 36 .. 42 et 74 (Beweis für die Winkelsumme im Dreieck) ne sont pas très-exactes. Nous allons suivre une marche inverse; nous démontrerons d'abord le principe du no. 74; nous en déduirons la théorie des parallèles."

Es wird zuerst direkt bewiesen, dafs der gröfsern Seite des Dreiecks der gröfsere Winkel gegenüberliegt und umgekehrt; dann indirekt, dafs die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt. (Der Beweis (?) ist zu lang, um ihn hier wiederzugeben.) Daran schliefsen sich dann die Sätze von den Parallelen.

---

damit wäre die ganze Kongruenzlehre hinfällig. Aber es zeigt sich hier wieder, wie an so manchen andern Stellen der Geometrie, dafs oft bei irgend einem Beweise Bedenken auftauchen über einen Punkt, der an andrer Stelle ohne jeglichen Skrupel hingenommen worden ist. Eines der eklatantesten Beispiele hierfür ist, dafs sehr viele Lehrbücher den Beweis für die Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, der sich auf die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze stützt, nicht anerkennen, weil man noch nicht gelernt habe einen Winkel zu halbieren. Dieselben Lehrbücher aber geben den Beweis für die Winkelsumme im Dreieck mittels einer Parallelen ohne jegliches Bedenken, obwohl das Ziehen einer Parallelen auch nicht gelehrt worden ist.

Metternich, Vollständige Theorie der Parallellinien.[1]) — Mainz 1815.

Verfasser glaubt natürlich das Problem gelöst zu haben, das aus den folgenden zwei Aufgaben bestehe:

„1) zu beweisen, dafs die Winkelsinusse, bei entfernteren Punkten vom Winkels-Scheitel, immer gröfser werden und jede gegebene Linie übertreffen können; 2) dafs die Parallelsinusse überall gleich und der senkrechten Normale gleich werden.“

Der Beweis gründet sich auf den Begriff: „Wenn zu einer Gröfse nach und nach angebliche gleichartige Teile gesetzt oder: Wenn von einer Gröfse nach und nach angebliche Teile weggenommen werden und dieses Verfahren so weit getrieben werden kann als man will, so mufs im ersten Falle eine Gröfse entstehen, die gröfser ist, im andern Falle: die kleiner ist, als jede angebliche Gröfse.“

Auf den Inhalt näher einzugehen verbietet die Weitläufigkeit, mit der die Abhandlung angelegt ist.

Rezensionen finden sich in den Heidelberger Jahrbüchern der Litteratur (April 1815) und in den Göttinger Anzeigen (April 1816).

Crelle, Ueber Parallelentheorieen und das System in der Geometrie. — Berlin 1816.

Der schwache Punkt in der Euklidischen Geometrie ist das Parallelentheorem.

„Die Parallelentheorie beruht auf zwei Sätzen:

1) Zwei gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, dafs die beiden innren an einer Seite liegenden Winkel zusammen zwei rechte ausmachen, treffen sich, so weit man sie verlängert, nirgends.“

Für diesen Satz giebt es einen strengen Beweis.

---

[1]) In der Vorrede werden erwähnt:

J. J. J. Hoffmann, Kritik der Parallel-Theorie. Erster Teil, welcher die Darstellung und Prüfung von siebzehn verschiednen Systemen enthält; Jena 1807. — Eine Abhandlung von Karsten über diesen Gegenstand.

2) „Zwei gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, daſs die beiden innern an einerlei Seite liegenden Winkel zusammen kleiner sind, als zwei rechte, treffen genugsam verlängert an derselben Seite zusammen.“

Dieser Satz bei Euklid Grundsatz. Hier die Schwäche der alten Geometrie.

„Alle diejenigen nämlich, die eine Parallelentheorie nach Euklidischen Begriffen von der Raumgröſse zu geben versucht haben, alle die das elfte Axiom nach Euklidischen Grundsätzen zu beweisen versucht haben, haben wie es scheint etwas eben so Unmögliches versucht .... als diejenigen, die den Kreisumfang oder die Quadratwurzel aus 2 und dergleichen in rationalen Zahlen auszudrücken sich bemühten. Dies läſst sich, dünkt mich, sogar beweisen.“

Die Euklidische Geometrie habe es nur mit begrenzten Räumen zu thun; da man aber den Durchschnittspunkt nicht kenne, so handle es sich bei unsrer Frage um unbegrenzten Raum.

„Der Gegensatz des elften Axioms lautet:

Zwei Gerade, die sich nicht begegnen, machen mit einer dritten zwei innere Winkel, die zusammen zwei rechte sind.“

Wäre dies bewiesen, dann auch das Axiom. Aber „Wie soll nun mit begrenzten Räumen Etwas für unbegrenzte Räume bewiesen werden?“

„Das elfte Axiom ist, wie es scheint, einer der Übergänge von dem Endlichen der geometrischen Vorstellung in das Unendliche, aus welchem die Vorstellung die endlichen Räume absondert.“

Euklid wollte im Endlichen bleiben; daher das Axiom. Daher die alte Geometrie, so lange man bei ihren Ansichten stehen bleibt, etwas Vollendetes.

Die Vernunft sträubt sich gegen das Axiom. Mit ihm würde aber alles fallen, was sich darauf stützt. Das Bestreben zur Überzeugung zu gelangen darf nicht aufhören.

Mit begrenzten Räumen ist nichts auszurichten, daher andrer Weg. Es handelt sich darum einen vernunftgemäſsen Übergang aus dem Unendlichen in das Endliche zu finden.

„Statt eines plötzlichen, gleichsam einen allmählichen Übergang von dem Unbegrenzten zu begrenzten Gröſsen zu versuchen, ist das Mittel, zur Überzeugung zu kommen.“

Es wird der Begriff zum Teil unbegrenzter Figuren, der Winkelräume und der Räume zwischen Parallelen eingeführt. Etwas Ähnliches findet sich bei Bertrand u. a. Winkel und Parallelenstreifen sind Gröſsen, denn sie lassen sich halbieren etc., kurz mit ihresgleichen vergleichen. Der Unterschied zwischen endlich und unendlich muſs dabei immer scharf im Auge behalten werden. Es handelt sich aber hier trotzdem um dasselbe, da wir endliches mit endlichem, unendliches mit unendlichem vergleichen, was bei beiden mit völliger Klarheit möglich ist. Zurückweisung der Ansicht, als wenn Winkelräume und Parallelstreifen keine Gröſsen wären.

Die Verwertung giebt der Verfasser nun in dem systematischen Gang der Geometrie.

p. 42: „Erklärung. Gerade Linien, die einander in ihrer ganzen Ausdehnung nicht begegnen, heiſsen Parallellinien.“

p. 44: „Erklärung. Der zum Teil unbegrenzte Raum, welcher zwischen zwei Parallelen liegt, soll Parallel-Raum heiſsen.“

„Lehrsatz. Wenn man zwei oder mehrere und so viel man will Parallelräume aneinanderfügt, so entsteht wieder ein Parallel-Raum.“

p. 45: „Lehrsatz. Durch Aneinanderfügen von Parallelräumen kann der ganze unbegrenzte Raum nicht ausgefüllt werden.“

Nachdem hierauf die Erklärung des Winkels gefolgt ist (s. Kapitel III) und über die Kongruenz gleicher Winkel gesprochen ist, kommt der dem zuletzt zitierten Lehrsatz entsprechende.

p. 47: „Jeder Winkel ist ein gewisser Teil des unbegrenzten Ebenenraums und durch Aneinanderfügen von Winkeln gleicher Gröſse kann der ganze Ebenenraum entweder genau oder soweit ausgefüllt werden, daſs weniger übrig bleibt als der einfache Winkel.“

p. 48: „Jeder Parallelraum ist kleiner als ein Winkel.“[1]) Beweis leicht auf Grund der vorher zitierten Lehrsätze.

p. 49: „Jeder ganz begrenzte Raum ist kleiner als ein Winkel.“

Darauf folgen Winkelsätze (Scheitelwinkel, Nebenwinkel) und Begriffsfestsetzungen (Winkelpaare bei geschnittnen Geraden).

p. 54: „Lehrsatz I a: Umkehrung des 11. Axioms. — Voraussetzung die Geraden scheiden sich.

Beweis. Denn der innere Neigungswinkel ist um den begrenzten Raum (des Dreiecks) gröfser, um den (Aufsen)winkel aber kleiner als der äufsere Neigungswinkel. Nun ist jeder begrenzte Raum kleiner als ein Winkel, folglich der innere Neigungswinkel kleiner als der äufsere.“

II b: „Wenn Neigungs- und Wechselwinkel gleich sind oder ...., so sind die Schenkel parallel.“

Beweis indirekt mit Satz I.

II a: Das 11. Axiom. — Beweis geht darauf zurück, dafs ein Winkelraum nicht innerhalb eines Parallelraums liegen kann, weshalb die betreffenden Geraden sich schneiden müssen.[2])

Hieran schliefsen sich die Sätze über die Winkel bei geschnittnen Parallelen.

Kries, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Jena 1817.

p. 291: „Zwei gerade Linien in derselben Ebene sind ihrer Lage nach parallel, wenn sie in immer gleicher Entfernung von einander bleiben[3]) oder nie zusammentreffen, soweit sie auch nach der einen oder andern Seite hin verlängert werden.“

---

[1]) Dieser Gedanke ist es, der sehr vielen sogenannten Beweisen des Parallelenaxioms zu Grunde liegt. Ob er von Crelle herrührt, wage ich nicht zu entscheiden, jedenfalls ist er aber hier ausführlich begründet resp. abgeleitet.

[2]) Der Verfasser glaubt damit einen völlig strengen Beweis des Parallelenproblems geliefert zu haben.

[3]) Dies dürfte das älteste Lehrbuch sein, in dem sich eine von der Euklidischen abweichende Definition der Parallelen findet und zwar also diejenige, die von dem gleichen Abstand aller Punkte ausgeht.

Blasche, Grundrifs der Elementar-Geometrie. — Reval 1819.

p. 19: „Erklärung. Zwei gerade Linien *AB*, *CD* sind gleichliegend oder haben einerlei Lage gegen eine dritte sie schneidende Linie *EF*, wenn sie mit dieser gleiche, übereinstimmig liegende Winkel *EGB*, *EHD* machen.“

p. 21: „Gleichliegende Linien können, soweit man sie auch an beiden Seiten verlängern mag, doch nirgends zusammentreffen, und sind daher, wie man kurz zu sagen pflegt, parallel.“

p. 22: „Wenn zwei gerade Linien *AB*, *CD* gegen irgend eine dritte einerlei Lage haben, so sind alle Punkte der einen Linie in gleicher Entfernung von der andern.“

Brewer, Lehrbuch d. Geometrie. — Düsseldorf 1822.

p. 4: „Gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und sich unendlich verlängert nicht schneiden, heifsen parallele oder gleichlaufende Linien.“

p. 15: „Wenn zwei Linien, welche in einer Ebene liegen, von einer dritten so geschnitten werden, dafs pp. Winkel gleich sind, so sind die Linien parallel.“

Beweis durch Kongruenz der Halbstreifen. Wenn also auf der einen Seite ein Schnittpunkt dann auch auf der andren, was unmöglich ist.

Montanus, Handbuch der Geometrie. — Berlin 1822.

p. 22: „Zwei gerade Linien in einer Ebene heifsen parallel zu einander, wenn sie in allen Punkten gleichweit von einander entfernt bleiben, soweit man sich dieselben verlängert denken mag d. h. wenn alle Senkrechten gleich sind. Dafs eine solche Lage einer Geraden gegen eine andre möglich sei, wird hier als Grundsatz angenommen, den gewifs jeder vernünftige Mensch vermöge seiner innern Anschauungskraft als gültig anerkennt, die aber dennoch dem spekulierenden, ich möchte sagen dem gelehrten Verstande noch Bedenklichkeiten übrig läfst.“

Verfasser weist dann auf den Artikel Parallelen in Klügel's Wörterbuch hin.

Thibaut, Grundrifs der reinen Mathematik. — Göttingen 1822.

p. 230: „Zwei gerade Linien werden parallel untereinander genannt, wenn sie nach keiner Seite hin, verlängere man sie soweit man will, zusammenstofsen können."

Die Entwicklung der Sätze bei geschnittnen Parallelen folgt aus der Winkelsumme des Dreiecks, die Thibaut bekanntlich mit Hülfe der Drehung als zwei Rechten gleich nachweist.

p. 184: „... tritt das allgemeine Prinzip einer völligen gegenseitigen Unabhängigkeit der progressiven und drehenden Bewegung ein. Insofern ein Punkt in gerader Linie fortschreitet, behält er durchaus die nämliche Richtung. Wenn also durch Drehung an einem Scheitelpunkte ein Winkel beschrieben worden und auf dem letzten Schenkel desselben beliebig fortgeschritten wird, ehe man aus seiner Richtung zu einer neuen drehend fortgeht, so ist die dadurch im ganzen bewirkte Änderung der Richtung völlig dieselbe, als wenn beide Drehungen, ohne durch eine progressive Bewegung unterbrochen zu werden, an dem nämlichen Scheitelpunkte vorgenommen wären."[1])

Paucker, Die ebene Geometrie. — Königsberg 1823.

p. 12: „Zwei gerade Linien werden entweder .... oder in einer und derselben Ebene so gezogen sein, dafs sie nirgends zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängern mag: solche Linien heifsen in Beziehung zu einander parallel oder Parallellinien."

p. 29 wird die Parallelenlehre eingeleitet durch den Satz: „Gegen eine Gerade läfst sich aus einem bestimmten Punkte nur eine einzige parallele Gerade ziehen." Dann folgen die Winkelsätze und ihre Umkehrungen mit indirekten Beweisen.

Köberlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Sulzbach 1824.

p. 40: „Linien, welche in einer Ebene überall gleichweit

---

[1]) Man vergl. Günther's oben zitierte Programmabhandlung über den Thibaut'schen Beweis.

von einander abstehen, werden parallel oder gleichlaufend genannt.

Parallellinien können sich nirgends einander nähern oder von einander entfernen, und niemals zusammenlaufen."

„Konzentrische Kreise sind parallel."

„Die gerade Linie, welche die Endpunkte aller gleich grofsen Senkrechten, die auf einer geraden Linie nebeneinander errichtet werden können, mit einander verbindet, ist von der letzteren überall gleichweit entfernt und daher zu dieser parallel."

Crelle, Lehrbuch der Elemente d. Geometrie. — Berlin 1826.

p. 13: „Gerade Linien, welche mit einer beliebigen dritten an einerlei Seite gleiche Winkel machen, heifsen Parallelen."

Auf das Weitere will ich hier nicht eingehen, da es schon in der diesem Gegenstand gewidmeten besondren Schrift des Verfassers genügend geschehen ist. Der Beweis des 11. Axioms ist hier im wesentlichen derselbe, wie dort: ähnlich in seiner Anlage denen von Bertrand und Schulz.

---

v. Forstner, Grundrifs d. Elem. d. r. Math. — Berlin 1826.

p. 449: „Zwei gerade Linien in einer und derselben Ebene, welche unendlich verlängert in keinem Punkte zusammentreffen, heifsen parallele Linien oder blofs Parallelen."

Daran schliefst sich die Konstruktion von Parallelen durch Konstruktion zweier Senkrechten auf einer Geraden. Diese keinen Punkt gemeinsam, sonst Dreieck mit zwei rechten Winkeln. Dies nicht möglich. Beweis dafür stützt sich auf den Satz, „dafs der Aufsenwinkel gröfser ist als ein innerer von ihm getrennt liegender."

Förstemann, Lehrbuch der Geometrie. — Danzig 1827.

p. 13 nach Aufstellung und Besprechung der Winkelrelationen heifst § 45: „Findet eine der 16 Gleichungen des vorigen §, und finden also alle 16 statt, so sind die beiden

Geraden, welche von der dritten geschnitten werden, parallel, d. h. sie treffen sich nirgends, selbst unbegrenzt gedacht.

Indirekter Beweis, gestützt auf 1) die aus der Deckung der gleichartigen Wechselwinkel folgende Kongruenz der beiden Hälften des Konstrukts, welche durch die schneidende Gerade gebildet werden, und 2) den Satz, dafs zwei Gerade nicht mehr als einen Punkt gemeinsam haben können.

Wolff, Lehrbuch der Geometrie. — Berlin 1830.

p. 4: „Zwei gerade Linien, die in einer Ebene sich befinden und so liegen, dafs sie nicht übereinander weggehen, selbst wenn sie unendlich gedacht würden, heifsen Parallellinien."

„Grundsatz. Schneiden sich zwei gerade Linien, so giebt es keine dritte, die parallel ist mit einer jeden von ihnen."

Winkelsätze mit indirektem Beweis.

Bürger, Theorie der Parallellinien. — Heidelberg 1833.[1])

Der Verfasser glaubt den Beweis für das elfte Axiom Euklids gefunden zu haben und feiert den Sieg seines Nachdenkens über ein durch zwei Jahrtausende nicht gelöstes Problem in überschwenglicher Weise.

Die eigentliche Abhandlung leitet er mit dem Satze selbst (11. Axiom) ein. Der Beweis hat folgenden Gang. Es wird ein Dreieck (rechtwinkl.) angenommen; die Hypotenuse wird parallel mit sich verschoben, vor der Bewegung aber werden alle Strecken verlängert gedacht; daraus folgert der Verfasser, dafs immer ein Schnittpunkt vorhanden ist, weil der Endpunkt der Hypotenuse einmal unterhalb der einen Kathete liege und dann oberhalb, also notwendig während des Verschiebens einmal auf der Kathete liegen müsse. Man sieht, dafs der Kern der Frage gar nicht getroffen ist; aufserdem leidet aber der Beweis an dem Fehler, an dem alle angeblichen Beweise leiden, dafs nämlich Axiome zu Hülfe genommen werden, die

---

[1]) Der Verfasser erwähnt in einer Anmerkung eine zweite Auflage vom Jahre 1820 und setzt als Jahr seiner Erfindung 1815 fest, wo also wahrscheinlich auch die erste Auflage erschienen ist.

viel weniger oder wenigstens um nichts einleuchtender sind als unser Axiom selbst.

Der Abhandlung folgt sodann eine Zusammenstellung von Urteilen, die der erste Versuch erfahren z. B. in den Heidelberger Jahrbüchern der Literatur. 1818. p. 849.

Die aus dem Hinaufbewegen des Winkels folgenden Fehlschlüsse werden aufgedeckt, wogegen Bürger remonstriert.

Auch andere Rezensenten erkennen zwar die Bemühungen des Verfassers an, vermissen aber in den sogen. Beweisen das eigentlich Beweiskräftige.

Interessant ist übrigens, dafs ein Rezensent 1826 diese Schrift nicht besprechen will, „da dieser Gegenstand in unserer Zeit bereits bis zum Ekel besprochen und bestritten worden ist.“

E. G. Fischer, Lehrb. d. eb. Geometrie. — Berlin 1833.

p. 12: „Zwei gerade Linien in einer Ebene, welche ohne sich zu decken, gleiche Richtung haben, heifsen parallele oder gleichlaufende Linien.“

Die Parallelensätze werden dann auf grund gleichen Richtungsunterschiedes bewiesen. Von den übrigen Definitionen findet sich noch die Euklidische.

---

van Swinden, Elemente der Geometrie. — ed. Jacobi. — Jena 1834.

p. 9: „Zwei gerade Linien heifsen parallel, wenn sie gegen eine dritte Linie, die sie schneidet, dieselbe Neigung haben d. h. mit dieser an der einen Seite einen äufseren Winkel bilden, der so grofs ist als der innere Gegenwinkel an eben dieser Seite ist.“

In einer Anmerkung weist der Herausgeber hin auf d'Alembert, Melanges etc. V. p. 202, Taquet[1]) und Clavius.[2])

---

[1]) A. Taquet, Elem. (Euclideae) Geometriae planae ac solidae, quibus accedunt Selecta ex Archimede theoremata etc. ed. nova Amstelod. 1783. — Weitere Ausgabe, Rom 1745.

[2]) Euclidis Elem. Libri XV auctore C. Clavio, Francofurti 1607.

Euklids Definition, sowie die, welche sich auf den gleichen Abstand stützt, werden angeführt.

Euklids XI. Axiom wird zum teil indirekt bewiesen, zum teil mit Hülfe einer weiteren Parallelen.

Jacobi nennt König[1]) und Taquet und führt an, dafs Montucla (Histoire des Mathem. I. p. 209) mit Recht vermutet, dafs der betr. Satz ursprünglich ein Zusatz zu Satz 28 des ersten Buches gewesen sei und durch Nachlässigkeit eines Abschreibers aus seiner früheren Stelle gerückt sei. Fernere Literatur:

Nasser-eddin-Al-Tussi arabische Übersetzung des Euklid. Wallis, Opera Mathematica[2]) II, 667 u. 672.

Castillon in Mémoires de l'Academie de Berlin von den Jahren 1786 u. 1788.

Ulrich, Lehrbuch der reinen Mathematik. — Göttingen 1836.

p. 427 wird der Satz von der Winkelsumme im Dreieck folgendermafsen bewiesen: „Es werde der Winkel NCQ so, dafs sein Schenkel CQ in der Linie PQ bleibt, an PQ von C bis B verschoben, wodurch der Schenkel CN in die Lage BN' kommt. Es ist offenbar, dafs BN' zwischen den Linien BQ und BM liege, denn da W. $ACQ >$ W. ABC ist, so ist $2R - ACQ < 2R - ABC$, oder $NCQ < MBQ$, mithin, weil $N'BQ = NCQ$ ist, $N'BQ < MBQ$. Da nun die Linien BN' und ACN an derselben Seite von PQ mit dieser die gleichen Winkel an B und C einschliefsen,

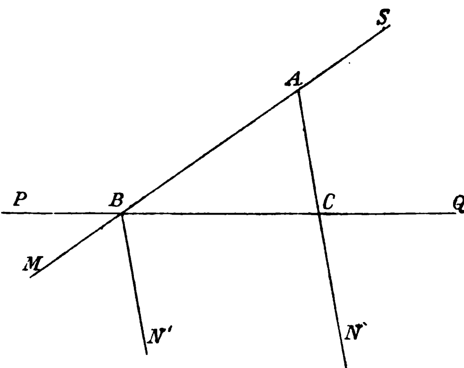


Fig. 1.

---

[1]) Koenig Elemens de Geometrie contenant les six premiers livres d'Euclide etc. à la Haye 1762.

[2]) Oxford, 1693.

also in gleichem Lagenverhältnis gegen PQ stehen, so sind auch — wie früher bewiesen — die Winkel dieser Linien gegen irgend eine andere Richtung MS, nämlich $N'BS$ und NAS, folglich auch deren Nebenwinkel MBN' und MAN einander gleich.

Demnach ist

$$PBM = ABC,$$
$$MBN' = BAC,$$
$$N'BC = NCQ = ACB;$$

addiert man diese Gleichungen zusammen, so folgt

$$PBM + MBN' + N'BC = ABC + BAC + ACB.$$

Die Winkelsumme im ersten Teile dieser Gleichung beträgt aber $2R$, folglich ist auch

$$ABC + BAC + ACB = 2R.\text{“}$$

p. 441 folgt die Lehre von den Parallellinien. Die Erklärung lautet: „Zwei gerade Linien in derselben Ebene, die obschon sie beliebig verlängert gedacht werden mögen, sich nicht schneiden, heifsen Parallellinien.“

Die nötigen Beweise stützen sich im wesentlichen auf den Dreieckssatz resp. werden ähnliche Betrachtungen wie dort angestellt.

Arneth, System der Geometrie. — Stuttgart 1840.

p. 10: „Gegenseitige Lage zweier Geraden. Betrachtet man die Gerade ihrer Lage und Richtung nach gegeben, so kann man die Lage und Richtung der andern mit denen der ersten vergleichen. Bei dieser Vergleichung sind nur zwei Fälle möglich: die Geraden haben entweder verschiedene oder sie haben dieselbe Richtung.

Von solchen Linien sagt man im gewöhnlichen Sprachgebrauche, sie neigen sich zu einander oder sie sind gleichlaufend, parallel.

Der Begriff der Neigung beruht auf dem der Annäherung, des endlichen Zusammentreffens, so dafs Verschiedenheit der Richtung, Neigung, Zusammentreffen nur verschiedene Ausdrücke ein und derselben Bedingung sind, und Gleichheit der

Richtung, Parallelität, Nichtzusammentreffen verschiedene Ausdrücke des Gegensatzes."

Hieran schliefst sich unter dem Titel „Von der geneigten Lage" die Lehre vom Winkel. — Dann heifst es p. 15: „Von der parallelen Lage. Haben *CD* und *FG* gleiche Richtungen unter sich, so bilden sie auch gleiche Richtungen mit *AB* und es ist *BED* = *EHG*." Damit ist sofort die Überleitung zu den bekannten Sätzen von den Winkeln bei geschnittenen Parallelen gegeben.

Dann heifst es p. 16: „Man erkennt also die Gleichheit der Richtungen an diesen drei Eigenschaften der Winkel, man erkennt sie aber auch an dem Nichtzusammentreffen der beiden Geraden, da hierin eben der Charakter der Gleichheit der Richtungen liegt und die angegebenen Eigenschaften der Winkel darauf beruhen, daher eine nicht minder wichtige Wahrheit wie die vorhergehende, die folgende ist:

„13) Sind zwei Linien *AB* und *CD* zu einander parallel, und zieht man die Linien *KL*, *MN*, *OP*, *QR* u. s. w. nach einer beliebigen aber unter einander gleichen Richtung, so müssen die Entfernungen der Punkte *L*, *N*, *P*, ... von *K*, *M*, *O*, ... oder die Geraden *KL*, *MN*, *OP*, ... sämtlich einander gleich sein oder die beiden Parallelen müssen in dieser Richtung immer die gleiche Entfernung behalten."

Hierzu wird ein indirekter Beweis gegeben.

Euklid, Elemente ed. Dippe. — Halle 1840.

p. 2: „Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und auf keiner der beiden Seiten zusammentreffen, soweit man sie auch an beiden Seiten verlängern mag."

p. 3: „Grundsatz 11: Werden zwei gerade Linien von einer dritten so geschnitten, dafs die beiden inneren an einerlei Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei rechte sind, so treffen diese beiden Linien, genugsam verlängert, an eben der Seite zusammen."

Hierzu bemerkt der Herausgeber, dafs Peyrard, der Mehrzahl der Handschriften folgend, in seinen „Oeuvres d'Euclide. Paris 1814" diesen Grundsatz als Forderung aufführe.

Wunder, Die Elemente der ebenen Geometrie. — Leipzig 1840.

p. 14: „Haben zwei Strahlen einerlei Richtung, aber es ist keiner nach dem Anfangspunkt des andern hin gerichtet, so können sie nie zusammentreffen und heifsen dann parallel." Winkelsätze mit Richtungsbeweis.

Beck, Die ebene Geometrie nach Legendre. — Bern 1842.

§ 15: „Parallellinien sind Linien, welche in ein und derselben Ebene liegen und nie zusammentreffen."

Nach der Dreieckslehre findet sich § 68 Lehrsatz: „Sind zwei Linien senkrecht auf einer dritten, so sind sie parallel," § 69 die Erklärung der Namen Wechselwinkel etc.

§ 70: Lehrsatz: „Werden zwei Linien von einer dritten geschnitten, und beträgt die Summe der zwei inneren anliegenden Winkel $2R$, so sind diese Linien parallel."

Analog werden die andern Sätze behandelt. Dann folgen von § 75 an die Umkehrungen.

§ 79: „Parallelen sind überall gleich weit von einander entfernt."

Frantz, Die Philosophie der Mathematik. — Leipzig 1842.

p. 69: „Die gerade Linie bezieht sich auf sich selbst als auf sich aufserhalb ihrer, sie ist, sie wird ihre Parallele. Als Parallele ist sie aufser sich gekommen und kommt sie aufser sich."

p. 116 äufsert sich der Verfasser gegen Legendre, indem er den Nachweis zu bringen versucht, dafs der Satz von der Winkelsumme erst nach der Parallelentheorie folgen dürfe. Legendre's Beweis leide an dem Fehler, dafs er eine unendliche Reihe von Konstruktionen fordere. Die Unbeweisbarkeit des elften Axioms liege in der falschen Definition des Parallelismus.

Es mufs definiert werden: „Eine gerade Linie ist einer andern parallel, wenn sie in allen ihren Punkten von derselben gleichweit absteht."

Dafs sich aus der Konstruktion der gleichweit entfernten

Punkte eine Gerade ergebe, liege in der Definition der Geraden. Danach ergebe sich folgender Gang der Parallelen theorie:

„a. Lehrsatz. Ist eine gerade Linie von einer andern in allen Punkten gleichweit entfernt, so hat auch diese von jener in allen Punkten gleiche und dieselbe Entfernung.

b. Lehrsatz. Eine gerade Linie, die in zwei Punkten von einer andern auf derselben Seite gleichweit absteht, ist derselben parallel.

c. Lehrsatz. Die bekannten Winkelrelationen, das elfte Axiom etc.

d. Sind zwei Gerade einer dritten parallel, dann auch untereinander.

e. Die Winkelsumme im Dreieck."

Francoeur, Vollständiger Lehrkurs der reinen Mathematik. Ed. Külp. — Bern 1843.

p. 25: „Zwei gerade Linien, welche, obgleich in einer Ebene liegend, einander nie begegnen, so weit man sie auch nach einer oder der andern Seite hin verlängern mag, heifsen Parallellinien."

Die Sätze werden bewiesen durch Vergleichung von Winkelräumen und Parallelstreifen.

In einer Anmerkung wird auf die Identität dieser Sätze mit dem elften Axiom hingewiesen; ein besonderes Axiom ist nötig. Es wird hier folgendermafsen geformt:

Wenn eine Linie A auf einer Linie B senkrecht steht und die Linie C trifft dieselbe unter einem spitzen Winkel, so müssen A und C gehörig verlängert sich schneiden.

Der Beweis ist oben angedeutet.

Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie. — Jena 1844.

p. 36: „Werden zwei Gerade AB und CD von einer dritten EF so geschnitten, dafs unter den dadurch entstehenden acht Winkeln eine der zwölf Grundgleichungen[1]) stattfindet, so

---

[1]) Diese Gleichungen sind im vorhergehenden Paragraphen aufgestellt; es sind die bekannten.

nennt man die geschnittenen Linien parallel oder auch Parallellinien oder kurz Parallelen."

„Parallellinien können sich niemals schneiden, soweit sie auch verlängert werden mögen."

Beweis durch Kongruenz von Hülfsdreiecken. Es folgen dann die Sätze über das Schneiden von Geraden, wenn die Summe der inneren Winkel kleiner als zwei Rechte ist.

Dazu bemerkt der Verfasser p. 41: „Es ist bereits oben bemerkt, dafs dieser Satz nicht streng bewiesen sei. Soll dies geschehen, so hat man folgenden Weg einzuschlagen.

Wenn man in der Lehre von den Parallelen soweit gediehen ist, so schalte man folgende Sätze ein:

1) Eine halbbegrenzte Gerade erleidet keine Veränderung ihrer Gröfse, wenn man eine vollbegrenzte zu ihr hinzufügt oder von ihr wegnimmt.

2) Ein Winkelblatt erleidet keine Veränderung seiner Gröfse, wenn man durch eine Gerade, die dem einen seiner Schenkel parallel ist, einen halbbegrenzten Streifen zu ihm hinzufügt oder von ihm wegnimmt.

3) Nie kann ein Winkelblatt, sei der zugehörige Winkel noch so klein, ein blofser Teil eines halbbegrenzten Streifens sein, der letztere sei so breit als man wolle."

Hierauf stützt sich dann der Beweis in der bekannten Weise.

Schliefslich geht der Verfasser noch auf den Abstand der Parallelen ein.

Legendre, Elemente der Geometrie. ed. Crelle.[1]) Berlin 1844.

---

[1]) Aus der Vorrede zur zwölften Auflage des Originals:

„Da der Beweis der Theorie der Parallelen, so wie er sich in der dritten bis achten Auflage findet, nicht ganz frei von Einwendungen war, so hatte man sich entschlossen, diese Theorie in der neunten Auflage wiederum beinahe ganz nach Euklid vorzutragen. Fernere Untersuchungen über diesen Gegenstand hatten zu zwei neuen Beweisen des Lehrsatzes von der Summe der Winkel eines Dreiecks geführt, die ohne Hülfe irgend eines Postulats gegeben werden.

Von diesen ist der, der sich am wenigsten von der gewohnten Ansicht entfernt, hier aufgenommen."

p. 16: Wird der Satz von der Winkelsumme des Dreiecks durch Konstruktion von Hülfsdreiecken bewiesen, indem gezeigt wird, dafs die Winkelsumme immer die gleiche bleibt, während ein Winkel des neuen Dreiecks kleiner als die Hälfte eines des alten Dreiecks wird. Die Schwäche des Beweises liegt darin, dafs diese Konstruktion unendlich oft angestellt werden mufs.

p. 20 folgt dann das elfte Axiom als Lehrsatz mit einem ähnlichen Beweise, woran sich die Winkelsätze anschliefsen.

In einer Anmerkung p. 23 geht Crelle auf das Parallelenproblem näher ein und legt Legendre's Beweis, dafs die Winkel-

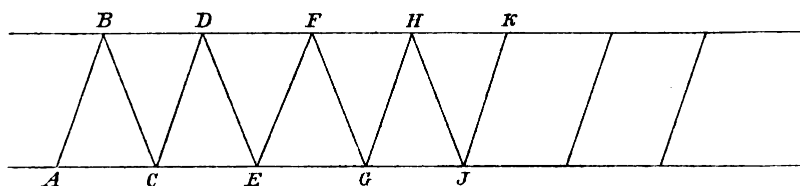


Fig 2.

summe nicht gröfser und nicht kleiner als $2R$ sein kann „des Interesses wegen“ dar. Der Vollständigkeit wegen soll dieser Beweis hier mitgeteilt werden.

ABC sei das geg. Dreieck und ACJ eine gerade Linie. Man mache $CE = AC$, $DCE = BAC$ und $DC = AB$: so ist das Dreieck DCE dem Dreiecke ABC gleich. Wäre nun $BAC + ABC + BCA > 2\varrho$ (ϱ bedeute einen rechten Winkel), so wäre $BAC + ABC + BCA > BCA + DCE + BCD$, weil die letzten drei Winkel zusammen gleich zwei rechten sind. Nimmt man also auf beiden Seiten den Winkel BCA und dann den Winkel $BAC = DCE$ weg, so bleibt $ABC > BCD$. Da aber die Winkel ABC und BCD von gleichen Seiten $BC = BC$ und $AB = CD$ eingeschlossen sind, so folgt daraus, dafs $BD < AC$ sein müfste.[1] Man mache auf dieselbe Weise das Dreieck EFG dem Dreiecke CDE oder ABC gleich: so wird eben so gezeigt, dafs $DF < CE$ oder $< AC$ sein müfste; und zwar ist zugleich $DF = BD$, weil $\triangle BCD = \triangle DEF$. Eben das läfst sich von FH und HK zeigen; so weit man will. Der Unterschied von BD und

[1] Legendre stützt sich hierbei auf Sätze, die unabhängig von Parallelen bewiesen sind.

AC mag nun so klein sein als man will, so kann doch ein beliebiges Vielfache desselben, welches der Unterschied der ganzen Linie *BDFHK* von der Linie *AJ* sein würde, jede Gröfse erreichen, und folglich gröfser werden als die Summe der beiden Linien am Ende, *AB* und *JK*; folglich würde unter der Voraussetzung, dafs $A + B + C > 2\varrho$ sein kann, worauf alles dieses beruht, die gebrochene Linie *ABKJ* kürzer sein können als die gerade *AJ*. Da dieses unmöglich ist, so ist die Voraussetzung unstatthaft. Folglich kann die Summe der drei Winkel eines Dreiecks nicht gröfser sein, als zwei rechte.

Um zu zeigen, dafs auch die Summe der drei Winkel eines Dreiecks nicht kleiner sein kann als zwei rechte, lege

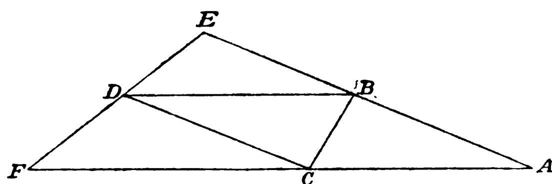


Fig. 3.

man, sagt Legendre, an die, dem kleinsten Winkel *A* eines Dreiecks *ABC* gegenüberliegende Seite *BC* ein Dreieck *DBC*, welches *ABC* gleich ist, auf die Weise, dafs man $DBC = BCA$ und $DCB = CBA$ macht; und ziehe durch *D* eine beliebige gerade Linie, die die verlängerten *AB* und *AC* in *E* und *F* schneidet.

Wäre nun die Summe der drei Winkel in dem Dreiecke *ABC* kleiner als zwei Rechte, und zwar $= 2\varrho - \delta$, so wäre auch die Summe der Winkel von $DBC = 2\varrho - \delta$, weil die Dreiecke einander gleich sind. Da nun die Summe der drei Winkel in jedem der beiden übrigen Dreiecke *DEB* und *FDC*, wie vorhin bewiesen, wenigstens nicht gröfser sein kann als zwei Rechte: so ist die Summe der 12 Winkel, in allen vier Dreiecken der Figur, höchstens

$$\left.\begin{array}{r} 4\varrho \\ + 2\varrho - \delta \\ + 2\varrho - \delta \end{array}\right\} = 8\varrho - 2\delta.$$

Nun ist die Summe der drei Winkel an jedem der drei Punkte $B, C, D = 2\varrho$. Zieht man diese neun Winkel, die also zu-

sammen 6ϱ ausmachen, von jenen zwölf Winkeln ab, so bleiben die drei Winkel A, E und F des Dreiecks AEF übrig, die also höchstens $= 2\varrho - 2\delta$ sind. Daraus folgt, dafs, wenn die drei Winkel in dem kleinen Dreieck ABC um δ weniger betragen als zwei Rechte, die drei Winkel in dem gröfseren AEF schon (mindestens) um das Doppelte, 2δ, von zwei Rechten verschieden sind. Wiederholte man also die Zusammensetzung, so ginge das so weiter. So klein aber auch δ sein mag: so kann ein beliebiges Vielfaches desselben doch jede beliebige Gröfse und also selbst 2ϱ übersteigen; woraus folgen würde, dafs die Summe der Winkel eines hinreichend grofsen Dreiecks $= 0$, oder selbst weniger als 0 sein könne. Da dieses unmöglich ist, so ist die Voraussetzung, dafs die Winkel im Dreieck kleiner sein können als zwei Rechte, unstatthaft.

Damit wäre also gezeigt, dafs die Summe der Winkel gleich zwei Rechten sein mufs.

Der erste Teil des Beweises ist einwurfsfrei; „der andere Teil aber hat eine schwache Stelle, nämlich da, wo verlangt wird, dafs durch D eine gerade Linie gezogen werden soll, die E und F zugleich schneidet. Diese Forderung stimmt im wesentlichen mit dem zu beweisenden Axiom überein.[1])

Crelle giebt dann noch eine Vereinfachung des auf S. 16 bewiesenen Satzes, erkennt aber Legendre's Versuch, das berühmte Problem zu lösen, als der vollständigen Lösung möglichst nahe an; er verweist ferner auf den Beweis in seinem Lehrbuch. Vergl. Zitat aus Crelle p. 274.

p. 26 folgt der Lehrsatz: „Zwei Parallelen sind überall gleichweit von einander entfernt."

J. H. T. Müller, Lehrbuch der Geometrie. — Halle 1844.

Es werden zuerst die Winkelerklärungen durchgenommen. Dann heifst es p. 21: „Haben zwei von einer dritten m halbbegrenzte Linien eine solche Lage, dafs eine derselben, wenn

---

[1]) Hiernach ist das elfte Axiom identisch mit dem folgenden: „Liegt zwischen zwei von einem Punkte ausgehenden Strahlen ein Punkt, so läfst sich immer durch ihn eine Gerade legen, die die beiden Strahlen zugleich schneidet."

sie längs der *m* gleichmäfsig so lange fortschreitet, bis beider Anfangspunkte zusammenfallen, auf die andere fällt, so sagt man, dafs die beiden parallel seien."

Dann folgen die Winkelsätze.

p. 23: „Lehrsatz. Durch einen Punkt aufserhalb nur eine Parallele denkbar." Beweis indirekt.

Recht, Die Elemente der Geometrie. — München 1844.

p. 17 u. f. werden die Winkelerklärungen erörtert. Dann folgen Dreieckssätze (Kongruenzsätze) und Sätze über das Perpendikel und das gleichschenklige Dreieck.

p. 47: „Zwei gerade in einer Ebene liegende Linien, die sich in keinem Orte schneiden, soweit man sie auch verlängert denkt, heifsen parallel oder Parallellinien."

Dann folgen die Winkelsätze und ihre Umkehrungen mit indirekten Beweisen. (Richtung.)

Mahistre, Lehrbuch der vergleichenden Geometrie. ed. Lorey. — Weimar 1845.

p. 16: „Zwei gerade, in einer und derselben Ebene liegende Linien heifsen parallel, wenn sie sich nicht schneiden, so weit man auch beide verlängern mag."

Salomon, Reine Elementargeometrie. — Wien 1847.

p. 19: „Zwei gerade Linien, welche in einer Ebene von einander getrennt liegen, stehen ebenfalls in einer bestimmten Beziehung, zu deren Kenntnis man gelangt, wenn man sie mit einer dritten Geraden durchschneidet und gleichliegende Winkel mit einander vergleicht. Sind diese Winkel einander gleich, so heifsen jene Linien gleich gerichtet."

„Zwei gerade Linien, welche in derselben Ebene liegen und sich nicht schneiden, wenn sie auch auf jeder Seite ins Unendliche verlängert gedacht werden, heifsen parallel oder Parallellinien."

Nachweis, dafs parallele Gerade gleich gerichtet sind, woraus der Beweis für die Winkelsätze folgt.

Steffenhagen, Kompendium der Planimetrie. — Parchim 1847.

p. 22: „Gleichgerichtete gerade Linien in derselben Ebene entstehen, wenn zwei bewegliche Punkte in der Ebene sich beide in derselben Richtung bewegen. Es ist hierbei eine dreifache Lage möglich; . . . . beide Linien liegen zwar in derselben Ebene, aber weder aufeinander, noch eine in der Verlängerung der andern; sondern nebeneinander. Gleichgerichtete Geraden dieser letzten Art heifsen Parallellinien oder gleichlaufende Linien. Parallellinien oder gleichlaufende Linien sind gerade Linien in derselben Ebene, die bei der gröfstmöglichen Verlängerung in gerader Richtung nach beiden Seiten hin einander nie berühren oder auf einander treffen werden.“

Tellkampf, Vorschule der Mathematik. — Berlin 1847.

p. 241: „Zwei Gerade, welche unendlich verlängert in keinem Punkte zusammentreffen und folglich keinen Winkel bilden können, heifsen Parallelen.“

Der Beweis der Winkelsätze geht aus dieser Erklärung hervor, er ist natürlich indirekt.

Knorr, Elemente der Geometrie. — Kiew 1849.

Der Verfasser führt den Begriff des rechtwinkligen Zweiecks ein und verwertet ihn zu einer Reihe von Sätzen z. B. zum Beweis, dafs die Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck gleich zwei Rechten ist und folglich in jedem.

Darauf gründet sich dann die Parallelenlehre und schliefst mit Euklids elftem Axiom.

In der Vorrede wird auf

Bunjakowsky, Mémoires de l'académie d. St. Petersbourg 1844, hingewiesen, der „eine ebenso gelehrte als scharfsinnige Kritik der verschiedenen Paralleltheorieen“ geliefert habe und besonders den Mangel von Legendre's Beweis (II. Teil) völlig aufgedeckt habe. Verfasser schliefst sich wesentlich an Crelle an und verwirft Lobatschewsky.

Ebensperger, Gemeinfafsliche Geometrie. — Nürnberg 1850.

p. 12: „Zwei oder mehrere Linien, in derselben Ebene liegend, welche in allen Punkten gleichweit von einander entfernt bleiben und, selbst wenn sie unendlich verlängert würden, nie zusammentreffen, heifsen Parallellinien. Diese können sowohl von Geraden, als von krummen Linien gebildet werden.“

Lübsen, Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Hamburg 1850.

p. 50: „Zwei gerade Linien, welche in einer Ebene liegen und nach keiner Seite hin zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängert denken mag, heifsen parallel.“

Dann folgen die Winkelsätze.

p. 53: „Lehrsatz. Zwei Parallellinien sind überall gleichweit von einander entfernt.“

Durch Kongruenz von Dreiecken bewiesen.

Bartholomäi, Geradlinige Planimetrie. — Jena 1851.

p. 14. § 25: „Die Möglichkeit sich nicht schneidender Geraden ist nur eine logische, denn wir wissen noch nicht, ob es wirklich Gerade giebt, welche sich nicht schneiden, ...“

p. 42. § 63: „Wir haben jetzt zu den sich nicht schneidenden Geraden überzugehen. Wir bekümmern uns nur um diejenigen, welche in derselben Ebene liegen. Sie heifsen Parallellinien oder Parallelen. Parallelen sind also solche Gerade in der Ebene, welche sich nirgends schneiden.

Durch diese Erklärung ist der Begriff der Parallelen nur negativ bestimmt, und die Realität derselben noch nicht erwiesen. Wir haben deshalb die doppelte Aufgabe: 1) aus der negativen Erklärung der Parallelen eine positive abzuleiten, 2) die Wirklichkeit der Parallelen nachzuweisen.

§ 64. „Parallelen treffen nie zusammen, also bilden sie keinen Winkel, mithin kann kein Unterschied ihrer Richtungen

gedacht werden, folglich haben sie dieselbe Richtung. Mithin sind Parallelen solche Gerade, welche dieselbe Richtung haben.

Parallelen sind inbezug auf die Richtung dieselbe Linie. —“

§ 65 löst dann die Aufgabe 2 des § 63.

§ 66 faſst den Parallelstreifen auf und weist nach: „Parallelen sind solche Gerade, welche eine Fläche einschlieſsen, welche inbezug auf die Halbebene gleich Null oder verschwindend klein ist.“

Kunze, Lehrbuch der Geometrie. — Jena 1851.

p. 37: „Eine Linie von der Beschaffenheit, daſs alle ihre Punkte in einerlei Ebene von einer Geraden gleichweit abstehen, heiſst eine Parallellinie oder eine Parallele zu derselben.“

„Grundsatz. Die Parallele zu einer Geraden ist selbst eine Gerade.“

Unger, Die Geometrie des Euklid. — Leipzig 1851.

Zu der p. 45—49 ganz in Euklidscher Weise dargestellten Parallelenlehre heiſst es in einem Anhange p. 66: „Die Erklärung der Parallelen enthält bloſs negative Merkmale; man erfährt durch dieselbe, „daſs es Linien in einer Ebene sind, die nicht zusammentreffen“ und daher bietet diese Erklärung direkt kein Mittel dar, woraus sich erkennen lieſse „ob zwei geg. Linien parallel oder nicht“.“ Die Frage nach den Merkmalen erledige sich durch eine dritte Linie und die Sätze über die Winkel.

August, Lehrbuch der Mathematik. — Berlin 1852.

p. 35: „Zwei gerade Linien heiſsen parallel, wenn sie in derselben Ebene liegen und zu beiden Seiten, so weit man will, verlängert nie zusammentreffen.“

Diese Erklärung folgt nach der Lehre von der Kongruenz. Daran schlieſsen sich zwei (resp. drei) Lehrsätze, wie der folgende:

„Wenn bei zweien von einer dritten durchschnittenen Linien die inneren Winkel auf einer der schneidenden Linie zusammengenommen zwei rechte betragen; so ist dies auch

auf der andern Seite der Fall und die Gegenwinkel und Wechselwinkel sind überall gleich.“

Dann heifst es: „Wenn zwei gerade Linien von einer dritten so durchschnitten werden, dafs beide innere Winkel . . . . . . gleich sind, so sind die Linien parallel.“

Als Umkehrung dieses Satzes folgt „Grundsätzlicher Lehrsatz: Zwei Linien, die mit einer durchschneidenden auf einer Seite innere Winkel bilden, die zusammen kleiner als zwei rechte sind, treffen sich gehörig verlängert auf dieser Seite.“

Es wird hervorgehoben, dafs dieser Lehrsatz aus den dagewesenen Grundsätzen und Lehrsätzen sich nicht streng beweisen lasse. Euklides habe ihn daher als Grundsatz aufgestellt. Viele Beweise. Es folgt dann als angeblich einfachster ein indirekter Beweis, der sich auf den Hülfssatz stützt, dafs jedes beliebige Winkelblatt gröfser ist als jeder beliebige Parallelstreifen.“

Kosack, Beiträge zu einer systematischen Entwicklung der Geometrie aus der Anschauung. — Nordhausen 1852. (Progr.)

p. 19: „Parallele Linien sind solche, welche dieselbe Richtung haben. Solche Linien werden ihrer Natur nach, soweit man sie auch verlängern mag, nie zusammentreffen.“ Winkelsätze mit Richtungsbeweis. — Umkehrungen.

Fresenius, Die Raumlehre eine Grammatik der Natur. Frankfurt a. M. 1853.

p. 40: „Lassen wir zwei Punkte sich mit gleicher Richtung bewegen, doch nicht so, dafs der eine in der Richtung des andern liegt, sondern nach irgend einer andern Seite hin, so erhalten wir zwei gleichgerichtete oder parallele Linien.

Zwei mit gleicher Richtung bewegte Punkte können nie zusammentreffen. Sonst müfsten sie ja auch umgekehrt aus einem Orte herkommen können, was für zwei gleiche Richtungen eine Unmöglichkeit ist.“

Gernerth, Grundlehren der ebenen Geometrie. — Wien 1857.

p. 8: „Werden gerade Linien, welche in einer und derselben Ebene liegen, bezüglich ihrer Richtung mit einander verglichen, so sind zwei Fälle möglich; sie haben entweder dieselbe Richtung oder verschiedene Richtung.“ (Namen.)

p. 9: „Aus der Einerleiheit der Richtungen paralleler Linien ergiebt sich folgende Grundeigenschaft derselben: Parallele Linien treffen, beliebig weit verlängert, nie zusammen.“

Der Beweis der Winkelsätze stützt sich natürlich auf die „gleiche Abweichung der Richtungen.“

Snell, Lehrbuch der geradlinigten Planimetrie. — Leipzig 1857.

p. 18: „Zwei gerade Linien können so liegen, dafs sie, selbst ins Unendliche nach beiden Seiten verlängert, sich nicht schneiden. In diesem Falle heifsen die Linien gleichlaufend oder parallel.“

Die Winkelsätze werden mit Richtungsbeweis gegeben.

Ley, Die Planimetrie. — Bonn 1858.

p. 14: „Linien heifsen parallel, wenn sie in derselben Ebene liegen und verlängert sich nie treffen.“

Beweis mittelst Parallelverschiebung.

F. W. Becker, Lehrbuch der Elementargeometrie. Oppenheim a. R. 1859.

p. 4: „Liegen zwei Gerade so, dafs sie sich nicht schneiden, wenn man sie auch noch so weit verlängert, so heifsen sie gleichlaufend oder parallel.“

Heidenreich, Die Elemente der niederen Geometrie. — Leipzig 1859.

§ 5 handelt von den Winkeln, wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden und weist die Beziehungen unter diesen nach.

§ 6: „Zwei gerade Linien, welche, soweit man sie auch verlängern mag, sich nicht treffen, oder, was dasselbe sagt, zwei gerade Linien, die gleiche Richtung haben, heifsen Parallellinien."

„Man kann die eine oder andere Erklärung von Parallellinien wählen; im wesentlichen stimmen beide mit einander überein. Denn gleich gerichtete Linien können sich nie treffen, da sie in diesem Falle einen Winkel bilden, also verschiedene Richtung haben müfsten."

Franke, Die Elemente der eb. Geometrie. — Hannover 1860.

p. 11: „Zwei Gerade heifsen parallel, wenn sie sich nicht schneiden, wie weit sie auch verlängert werden. Da zwei parallele Gerade sich nicht schneiden, so erleidet die eine gegen die andere keine Ablenkung, es haben daher beide Gerade gleiche Richtung."

Der Beweis stützt sich auf dieselbe Ablenkung.

Giffhorn, Leitfaden der eb. Geometrie etc. — Braunschweig 1862.

p. 11: „Zwei Linien können nicht nur ihrer Gröfse, sondern auch ihrer Richtung nach mit einander verglichen werden und sind dann entweder gleichgerichtet, gleichlaufend (parallel) oder ..... Um über die Parallelität zweier Linien urteilen zu können, müssen ihre Richtungen mit der Richtung einer dritten sie durchschneidenden Linie verglichen werden."

Wiegand, Planimetrie. — Halle 1863.

p. 22: „Zwei Linien, welche ohne zusammenzufallen eine und dieselbe Richtung haben, nennt man gleichlaufend oder parallel."

„Lehrsatz. Parallele Linien schneiden einander niemals und nirgends, soweit man sie auch nach beiden Seiten verlängern mag" und Umkehrung.

Winkelsätze mit Richtungsbeweis.

Dronke, Die Elemente der eb. Geometrie. — M. Gladbach 1864.

p. 4: „Zwei gerade Linien, die ins Unendliche verlängert sich nicht schneiden, heifsen Parallellinien und man sagt, die eine sei parallel der andern."

„Der von zwei Parallelen eingeschlossene Raum wird Parallelraum genannt."

„Jeder Winkel nimmt einen gröfseren Flächenraum ein, als jeder Parallelraum."

„Schneidet eine Gerade eine von zwei Parallellinien, so schneidet sie bei gehöriger Verlängerung auch die andere." Auf diese Sätze stützt sich dann der Beweis des elften Axioms; den wichtigsten habe ich durch den Druck hervorgehoben.

Funck, Das Euklidische System der Geometrie der Ebene. — Berlin 1864.

p. 3: „Parallellinien sind Linien, die in einer Ebene liegen, und, wenn auch noch so weit nach beiden Seiten verlängert, sich niemals schneiden."

Weifsenborn, Die Elemente der Planimetrie. — Halle 1864.

p. 19: „Wenn zwei Gerade gleiche Richtung haben, so sagt man, sie sind Parallellinien."

„Grundsatz. Zwei parallele Gerade können sich nie schneiden, wenn man sie auch noch so weit verlängert. Und umgekehrt. Wenn sich zwei Gerade in derselben Ebene nirgends schneiden, auch nicht, wenn sie noch so weit verlängert werden, so sind sie parallel."

Die Winkelsätze werden mit Hülfe des gleichen Richtungsunterschiedes bewiesen.

Sonndorfer, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1865.

p. 11: „Zwei Gerade haben dieselbe Richtung, so heifsen sie parallel."

„Zwei Linien sind parallel, wenn sie noch so weit verlängert sich nie treffen."

„Zu einer gegebenen Geraden kann durch einen aufser derselben liegenden Punkt nur eine Parallele gelegt werden."

Sonnenburg, Ebene Geometrie. Bremen 1868.

p. 10: „Zwei unendliche, gerade Linien in der unbegrenzten Ebene, welche nicht konvergieren, also sich nicht schneiden, heifsen Parallellinien."

„Schneiden sich zwei gerade Linien, so giebt es keine dritte, welche mit einer jeden von beiden parallel ist." Beweis indirekt.

Die Winkelsätze werden durch Deckung der Halbstreifen bewiesen.

Teirich, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1868.

p. 13: „Zwei in einer Ebene liegende gerade Linien, welche gleiche Richtung besitzen, ohne ineinander zu fallen, heifsen parallel."

„Man erkennt leicht, dafs zwei solche Gerade immer in derselben Entfernung von einander bleiben und niemals zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängern mag."

„Zu einer Geraden läfst sich daher durch einen aufserhalb derselben liegenden Punkt jederzeit eine, aber auch nur eine Parallele ziehen."

Das elfte Axiom wird ebenfalls als Grundsatz ausgesprochen.

Adam, Lehrbuch der eb. u. körperl. Geometrie. Berlin 1869.

p. 12: „In jeder Fläche des Würfels bleiben je zwei gegenüberstehende Kanten, soweit man sie auch verlängert denkt, in stets gleicher Entfernung von einander. Ebendasselbe nimmt man wahr an den gegenüberstehenden Kanten eines viereckigen Tisches etc.

Linien dieser Art heifsen gleichlaufend oder parallel. Hieraus folgt:

Parallele Linien liegen in einer und derselben Ebene und behalten auch bei unendlicher Verlängerung stets die gleiche Entfernung von einander bei."

Daran schliefsen sich Übungen und dann Auseinandersetzungen über Konvergenz und Divergenz.

Beez, Die Elemente der Geometrie. — Plauen 1869.

p. 23: „Zwei Gerade, die, soweit man sie auch verlängert, einander nie schneiden, heifsen parallel."

Hieran schliefsen sich Erklärungen und Lehrsätze.

p. 26: „Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden ist nur eine Parallele zu derselben möglich."

Indirekter Beweis.

Rummer, Elementargeometrie. — Heidelberg 1869.

p. 2: „Zwei gerade Linien haben gleiche Richtung, dann nennt man sie gleichlaufende oder Parallellinien."

Die Winkelsätze werden p. 4 in bezug auf Parallelen ausgesprochen und sind der Erklärung gemäfs mit Richtungsbeweis versehen.

Fr. Becker, Die elementare Geometrie in neuer Anordnung. — Hanau 1870. (Progr.)

p. 22: „Der gemeinsame Punkt zweier Geraden kann auch in unendlicher Ferne liegen, man sagt dann, die Geraden schneiden sich gar nicht. Die Geraden heifsen in diesem Falle parallel."

„Lehrsatz. Wenn ein Kreuz durch eine Transversale ebenbildlich geschnitten wird, so kann dieselbe die zweite Gerade des Kreuzes selbst bei weitester Verlängerung nicht treffen und ist ihr parallel. (Gewöhnlich lautet dieser Satz: Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, dafs die entstehenden korresp. und Weckselwinkel gleich oder die inneren und äufseren entgegengesetzten Winkel supplementär sind, so sind die Geraden parallel.)"

Hierzu bemerkt Becker: „Ein solches Geschnittenwerden ist aber nur dann möglich, wenn die Geraden schon parallel sind, und findet in diesem Falle die Gleichheit der erwähnten Winkel für jeden beliebigen Schnitt statt. Es sollte daher der Satz also lauten: Wenn zwei sich schneidende Geraden von einer dritten so geschnitten werden, dafs gleiche .... Winkel entstehen, so ist die Schneidende der einen der beiden Geraden parallel; oder er sollte lauten: Wenn zwei Gerade, welche von einer dritten geschnitten werden, so zu einander

liegen, dafs die durch diesen Schnitt entstehenden korresp. Winkel gleich sind, so sind diese Geraden parallel."

Als Beweis des Lehrsatzes wird der durch Deckung gegeben. Ebenfalls als Lehrsatz folgt dann der Satz, dafs durch einen Punkt nur eine Parallele zu einer Geraden möglich ist.

Frischauf, Elemente der Geometrie. — Graz 1870.

p. 5: „Sind zwei in einem Punkte *S* sich schneidende Gerade *a* und *b* gegeben, und dreht man (in derselben Ebene) die Gerade *b* um einen in ihr befindlichen Punkt *B* derart, dafs ihr Durchschnitt mit *a* immer weiter und weiter rückt, so kann man schliefslich eine Lage der Geraden *b* erhalten, für welche der Durchschnitt verschwindet: man nennt diese Lage der beiden Geraden die parallele, und beide Gerade zu einander parallel. Wird die Drehung weiter fortgesetzt, so erscheint der Durchschnittspunkt auf der entgegengesetzten Seite der Geraden *a*."

„Von einem Punkte aufserhalb einer gegebenen Geraden läfst sich nur eine Gerade ziehen, welche zur gegebenen Geraden parallel ist."[1])

Grunert, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Brandenberg a/H. 1870.

p. 48: „Zwei in einer Ebene, ohne sich zu decken, nach ein und derselben Richtung hin sich erstreckende oder gegen einander, wie weit man sie auch nach beiden Seiten hin verlängern mag, immer völlig ein und dieselbe Lage habende gerade Linien heifsen einander parallel."

In einer Anmerkung (nicht für Schüler) legt der Verfasser dar, warum seiner Ansicht nach das vorliegende Problem ein eigentümliches Axiom erfordert. Als solchen Grundsatz stellt er auf: „Zwei gerade Linien, deren jede einer gewissen dritten geraden Linie parallel ist, sind einander parallel."

Daran schliefsen sich die Winkelsätze.

---

[1]) Hierzu sagt eine Anmerkung: Dieser Satz wird als Axiom bebetrachtet.

Heis und Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie. — Köln 1870.

Die Parallelenlehre geht aus von den Winkeln beim Durchschnitte zweier geraden Linien mit einer dritten.

p. 11: „Parallele Linien heifsen solche Linien, welche in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden, so weit man sie auch nach beiden Seiten hin verlängern mag.“

Dann folgt der Satz, dafs wenn die besondern Winkelbeziehungen eintreten, die Geschnittnen parallel sind.

Beweis durch Deckung der Halbstreifen.

Hierauf die Umkehrung des 11. Axioms mit indirektem Beweis, dann das elfte Axiom selbst ohne Beweis, aber in einem Anhange, p. 299, der Bertrand-Schulz'sche Beweis.[1])

Joh. Müller, Lehrbuch der element. Planimetrie. — Bremen 1870.

p. 21: „Wie die Lage zweier Punkte gegen einander aus der Bewegungsgröfse erkannt wird, welche erforderlich ist um die beiden Punkte zum Zusammenfallen zu bringen, so ist auch mit der Lage zweier Geraden gegen einander kein andrer Begriff zu verbinden. Da aber in der Geraden die veränderlichen Grundvorstellungen beide enthalten sind, so sind für die Gerade zwei einfache Bewegungen möglich: Verschiebung und Drehung (aufserdem, im Raume, eine Kombination beider Bewegungen).“

„Zwei Geraden, welche sich durch Verschiebung ohne Richtungsänderung zur Deckung bringen lassen, werden parallel genannt.“

„Man erhält also zwei parallele Geraden, wenn man von zwei sich deckenden Geraden die eine ohne Richtungsänderung verschiebt.“

„Da parallele Geraden ohne Richtungsänderung zur Deckung gebracht werden können, so haben sie dieselbe Richtung; man nennt sie deshalb auch gleichgerichtete Geraden. Eine be-

---

[1]) Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathematiques. 4. Genève 1778.

Schulz, Entdeckte Theorie der Parallelen. Königsberg 1784/86.

stimmte Richtung ist nicht an einen bestimmten Ort gebunden, sondern an jedem Orte existiert dieselbe Richtung."

„Parallele Geraden laufen nebeneinander her, ohne jemals zusammenzutreffen."

Die Winkelsätze werden p. 30 unter der Bezeichnung „das offene Dreiseit" behandelt. Ihre Behandlungsweise geht aus den Erklärungen hervor.

Brockmann, Lehrbuch der element. Geometrie. — Leipzig 1871.

p. 9: „Aufser der Lage, in welcher zwei Gerade sich schneiden und Winkel bilden, ist noch eine Lage zweier Geraden in der Ebene möglich, nämlich die, in welcher sie sich, selbst bei unendlicher Verlängerung, niemals schneiden.

Linien, welche in ihrer ganzen Ausdehnung keinen Punkt miteinander gemeinschaftlich haben, heifsen parallele Linien, Parallelen.

Die Parallelen bilden also mit einander keine Winkel, oder es besteht keine Abweichung der Richtung derselben von einander. Da nun jede andere Linie, welche von einem Punkte einer dieser Parallelen aus gezogen ist, mit dieser einen Winkel macht und daher von der Richtung dieser abweicht, so mufs sie auch von der Richtung der andern abweichen d. h. mit ihr einen Winkel bilden oder sie schneiden. Es folgen daher als Grundsätze: 1) Durch einen Punkt ist zu einer Geraden nur eine Parallele möglich; und 2) Eine Linie, welche eine von zwei Parallelen schneidet, schneidet auch die andere."

Hartmann, Geometrischer Leitfaden. — Bautzen 1872. — In Form von Fragen und Anweisungen.

p. 2: „Jede bestimmte Richtung einer Geraden nennen wir Lage.

Welche zwei Hauptfälle sind zu unterscheiden, wenn man zwei Geraden nach ihrer Lage mit einander vergleicht?"

p. 3: „Welche Geraden nennt man parallel?"

„Wie viele Geraden kann man durch einen Punkt zu einer

davon entfernt liegenden Geraden legen? Warum können parallele Gerade einander niemals schneiden?“

Hering, Planimetrie. — Leipzig 1872.

p. 4: „Zwei Gerade heifsen parallel, wenn sie nach beiden Seiten beliebig verlängert, keinen oder einen unendlich weit entfernten (fallende Körper, Sonnenstrahlen) Punkt gemeinschaftlich haben.“

p. 24: Die Winkelsätze stützen sich auf den Begriff der Richtung. — Daran schliefsen sich direkt die Sätze vom Aufsenwinkel und der Dreieckswinkelsumme.

Sadebeck, Elemente d. e. Geometrie. — Breslau 1872.

p. 11: „Zwei gerade Linien, welche beliebig verlängert nirgends zusammentreffen, heifsen parallel.“

„Grundsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer geraden Linie ist zu dieser nur eine einzige parallele Linie möglich.“

Die Winkelsätze durch Deckung der Halbstreifen bewiesen.

Schlegel, System der Raumlehre. — Leipzig 1872.

p. 23: „Ein von zwei Geraden mit verschiedner Lage eingeschlossner Teil der Ebene heifst Ebenenstreifen. Seine Gröfse ist unbestimmt; denn da die Gerade nicht begrenzt ist, so ist auch ein durch ihre Bewegung erzeugtes Gebilde nicht vollkommen begrenzt.“

„Zwei Geraden nach verschiedner Lage aber gleicher Richtung heifsen parallel.“

Job, Lehrbuch der Planimetrie. — Dresden 1873.

Nach der Erklärung des Begriffes Wechselwinkel heifst es p. 16: „Hat man eine gerade Linie und aufserhalb derselben einen Punkt und zieht man von demselben nach irgend einem Punkte der geg. Geraden eine zweite Gerade, so läfst sich immer durch den Punkt eine Gerade von solcher Beschaffenheit legen, dafs die entstandnen Wechselwinkel gleich sind.“

Beweis mittelst Drehung.

„Werden zwei gerade Linien so von einer dritten geschnitten, daſs gleiche Wechselwinkel entstehen, so treffen sich dieselben nicht, man mag sie verlängern so weit als man will.“

Beweis durch Deckung der Halbstreifen.

„Zwei gerade Linien, die mit einer Durchschneidenden gleiche Wechselwinkel bilden, nennt man Parallellinien.“

Man kann sie auch definieren

1) als Nichtschneidende,
2) als Linien gleicher Richtung.“

Nagel, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Ulm 1873.

p. 2: „Wenn zwei gerade Linien, so weit man sie verlängert, nicht zusammentreffen, so sind sie parallel.“

p. 8: „Um die Eigenschaften der Parallellinien zu untersuchen, vergleicht man die Winkel untereinander, welche eine gerade Linie mit ihnen macht, wenn sie beide Parallelen schneidet.“

Erster Satz: „Bei Parallellinien ist jeder äuſsere Winkel seinem inneren Gegenwinkel gleich.“ Richtungsbeweis.

Nach dem Satze von der Dreieckswinkelsumme folgen dann die Umkehrungen.

Spieker, Ebene Geometrie. — Potsdam 1873.

p. 11: „Zwei gerade Linien in einer Ebene, welche ohne sich zu decken gleiche Richtung haben, heiſsen parallel.“

„Parallelen schneiden sich auch bei unbegrenzter Verlängerung nicht.“

Dann folgt die Umkehrung.

Die Winkelsätze haben den Richtungsbeweis.

Baltzer, Die Elemente der Mathematik. — Leipzig 1874.

p. 31: „Wenn zwei Gerade mit einer dritten Geraden Winkel bilden, die gleich oder um 180⁰ verschieden sind — jede Gerade in einer bestimmten Richtung, die Winkel in einerlei Sinn genommen, so schneiden sie sich nicht.“

Indirekter Beweis durch Kongruenz der beiden Parallelstreifen.

Hinweis auf den Mangel des Bertrand'schen Beweises.

p. 12: „Wenn in einem Dreieck *ABC* ein Winkel *BAC* und eine an demselben liegende Seite *CA* unverändert bleibt, und die andere daranliegende Seite *AB* zu wachsen beginnt, so beginnt der ihr gegenüberliegende Winkel *ACB* zu wachsen. Wenn es nun einen bestimmten Winkel *ACD* giebt, welchem der Winkel *ACB* bei hinreichender Gröfse der Seite *AB* bis auf eine beliebig kleine Differenz sich nähert, so heifst der Schenkel *CD*, welcher nach einem unendlich fernen Punkt (dieser Ausdruck ist von Desargues 1630 und in weiterem Umfange von Newton 1687 gebraucht worden) des Schenkels *AB* gerichtet ist und letzteren nicht schneidet, während alle von *C* ausgehenden und in dem Winkel *ACD* enthaltnen Schenkel ihn schneiden, parallel mit *AB*.

Der Winkel *ACD* kann das Supplement des Winkels *BAC* erreichen, aber nicht überschreiten. Wenn *NC* normal zu *AB* ist, wenn *NB* und *NB'* entgegengesetzte Richtungen haben und wenn der Winkel $D'CN = NCD$ ist, so folgt aus der Kongruenz der (offnen) Figuren *BNCD* und *B'NCD'*, dafs auch *CD'* parallel mit *NB'*. Wenn insbesondre der Winkel *NCD* recht ist, so ist $D'CN + NCD = 180^0$, und die beiden Parallelen *CD* und *CD'* liegen auf einer Geraden.

Wenn aber eine solche Grenze *ACD* des Winkels *ACB* nicht existiert, wenn die Gerade eine geschlossene Linie ist, auf der man von *A* über *B* in derselben Richtung weitergehend nach *A* gelangt, so sind die Parallelen nicht konstruierbar.

Den Parallelen entsprechend werden einer Geraden entweder zwei getrennte unendlich ferne Punkte (real oder nicht real), oder ein unendlich ferner Punkt zugeschrieben.

Welcher von den drei möglichen Fällen stattfindet, kann weder empirisch (durch Beobachtung) noch theoretisch (spekulativ) entschieden werden. Auf die Voraussetzung eines unendlich fernen Punktes der Geraden ist die gemeine, Euklidsche Geometrie gegründet, der die Erfahrung nicht widerspricht und die im Folgenden entwickelt wird; auf die Voraussetzung eines Paares unendlich ferner Punkte der Geraden wird die allgemeine, Nicht-Euklidsche Geometrie gegründet."

Hieran schliefst sich in einer Anmerkung eine wertvolle historische Darstellung (verbunden mit Angabe der älteren Litteratur), von der wir hier das Wichtigste geben wollen.

Gauss 1792 ist von der Unbeweisbarkeit des 11. Axioms überzeugt. Bestätigung dieser Überzeugung durch die von Gauss, J. Bolyai, Lobatschewsky aufgestellte widerspruchsfreie Geometrie, indem sie die Möglichkeit geradliniger Dreiecke mit verschiednen Winkelsummen (unter 180°) zuliefsen. Diese erhält den Namen Nicht-Euklidsche (imaginäre) Geometrie, Astralgeometrie, Pangeometrie. — Diese Arbeiten fallen in die erste Hälfte dieses Jahrhunderts.

Die Möglichkeit einer Geometrie bei Negation unendlich ferner Punkte der Geraden ist von Riemann 1854 erkannt worden.

Der Übergang der allgemeinen Untersuchung zu der Euklidschen findet sich nun im folgenden Satze:

„Wenn die Schenkel CD mit NB, CD' mit NB' parallel sind, wenn die Winkel NCD, $D'CN$ recht sind, und daher CD und CD' auf der Geraden DD' liegen (Axiome der gemeinen Geometrie), so sind die Geraden BB', DD' parallel und . . . . .“

Helmes, Planimetrie. — Hannover 1874.

Nach Erledigung der Winkelsätze bei drei Geraden wird p. 31 der Satz aufgestellt, dafs wenn die bekannten Bedingungen stattfinden „die beiden geraden Linien nie zusammentreffen oder nie in einem Punkte sich schneiden, wie weit man sie auch verlängern mag, oder parallel sind.“

Beweis durch Deckung der Halbstreifen.

Der umgekehrte Satz jedoch, das elfte Axiom (oder fünfte Postulat), bedarf eines neuen Grundsatzes.

Vergl. Klügel, math. Wörterbuch, p. 728. — Ersch und Gruber, Encykl. „Parallell“.

Einfach und natürlich der Grundsatz: „Zwei gleich gerichtete Linien bilden mit jeder beliebigen Transversalen gleiche korrespondierende Winkel.“ (Thibaut.)

Hieraus ergiebt sich der Satz, dafs durch einen Punkt nur eine Parallele möglich ist zu einer Geraden.

Helmes selbst giebt dann folgenden Gang an:

„Grundsatz: Wenn zwei Gerade in einer Ebene einer und derselben dritten parallel sind, so sind sie auch untereinander parallel.

Folgerung: Durch einen Punkt ist nur eine Parallele zu einer Geraden möglich.

Folgerung: Schneidet eine Gerade eine von zwei Parallelen, so schneidet sie auch die andere.

Lehrsatz: Wenn zwei Gerade parallel sind, so gelten die bekannten Winkelbeziehungen. Beweis indirekt.

Folgerung: Das elfte Axiom Euklids."

Kober, Leitfaden. — Leipzig 1874.

p. 8: „Zwei gerade Linien können gemein haben die Richtung; dann heifsen sie parallel. Parallele Linien können einander nie treffen, sonst hätten sie aufser der Richtung noch einen Punkt gemein und müfsten zusammenfallen."

p. 10 folgen die Winkelsätze mit Richtungsbeweis.

Hub. Müller, Leitfaden der ebenen Geometrie.[1]) — Leipzig 1874.

p. 8:

„Erklärung. Zwei Linien sind parallel, wenn sie sich nicht schneiden, soweit man sie auch verlängern mag.

Grundsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden läfst sich nur eine Parallele zu derselben ziehen.

Lehrsätze.

a. Wenn zwei Wechselwinkel gleich sind, so sind die geschnittnen Linien parallel.

Beweis durch Deckung der Halbstreifen.

α. Werden zwei Parallelen von einer dritten Geraden durchschnitten, so sind Wechselwinkel gleich."

Beweis indirekt.

Es folgen dann die übrigen Winkelsätze.

---

[1]) In der dritten Auflage, 1889, findet die Parallentheorie eine von der hier zitierten so verschiedne Behandlung, dafs ich sie ebenfalls zitieren werde.

Schlömilch, Geometrie des Mafses. — Leipzig 1874.

p. 10: „Zwei gerade Linien, welche gleiche Richtung besitzen, ohne ineinander zu fallen, heifsen Parallelen. Man bemerkt leicht, dafs zwei solche Gerade immer nebeneinander herlaufen und niemals zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängern möge.“

„Zu einer gegebnen Geraden läfst sich durch einen aufser ihr liegenden Punkt jederzeit eine, aber auch nur eine, Parallele ziehen.“

Wagner, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Hamburg 1874.

p. 33 giebt Wagner den Nachweis der Winkelsumme im Dreieck, auf Grund der Aufgabe, ein Dreieck in ein andres von gleicher Winkelsumme zu verwandeln; des Lehrsatzes, jedes Dreieck läfst sich allmählich in ein andres von gleicher Winkelsumme verwandeln, in welchem die Summe zweier Winkel beliebig klein ist; und der sich daran anschliefsenden Lehrsätze.

Die Parallelenlehre schliefst sich dann an.

Worpitzky, Planimetrie. — Berlin 1874.

p. 10: „Axiom 11. Es giebt kein Dreieck, in welchem jeder Winkel kleiner wäre, als ein beliebig klein gegebener Winkel.

Scholie. Die Grundeigenschaften der Figuren, insofern man sie blofs als Örter auffafst, sind durch die bisher aufgezählten 11 Axiome erschöpft. (Unser 11. Axiom vertritt das gleichnummerierte Euklidische, vor welchem es u. a. die gröfsere Evidenz und auch den Vorzug voraus hat, dafs man keiner langen Entwicklungen zu seinem Verständnis bedarf.)“

Nach diesem Axiom ist der Beweis für die Dreieckswinkelsumme klar (durch fortgesetzte Konstruktion gleicher Dreiecke); ebenso die Entwicklung der Parallelenlehre.

Hablützel, Lehrbuch der synthetischen Geometrie. — Leipzig 1875.

p. 35: „Zwei Gerade in einer Ebene, welche bei verschiedner Lage eine gleiche Richtung haben, werden parallele .... genannt.“

Kruse, Elemente der Geometrie. — Berlin 1875.

p. 20 wird die Winkelsumme des Dreiecks mittelst Drehung als gleich zwei Rechten bewiesen. Daran schliefsen sich die Winkelsätze bei geschnittnen Geraden.

p. 22: „Zwei Gerade einer Ebene, welche niemals zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängern möge, heifsen parallel.“

p. 23: „Da zwei parallele Gerade keinen Punkt gemein haben, so kann die eine derselben nicht durch Drehung in die Lage der andern gebracht werden; sie bilden also auch keinen Winkel miteinander.“

Parallelenverschiebung.

Schurig, Elemente der Geometrie. — Plauen 1876.

p. 3: „Zwei Gerade in einer Ebene, welche beliebig verändert sich nicht schneiden, heifsen parallel.“

Die Beweise der Winkelsätze indirekt.

Zmurko-Fabian, Lehrbuch der Mathematik. — Lemberg 1876.

p. 29 wird durch Verschiebung eines Dreiecks, das am Schnittpunkt zweier Geraden konstruiert wird, eine dritte Gerade gewonnen, die mit der einen der beiden ersten keinen Punkt gemein hat.

„Solche Gerade heifsen parallele Geraden, und damit sie parallel seien ist nur erforderlich, dafs der Winkel beim Verschieben sich gleich bleibe.“

J. K. Becker, Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage. — Berlin 1877.

p. 59: „Bilden zwei gerade Linien einer Ebene mit einer dritten in derselben Ordnung dieselben Winkel, so haben sie in ihrer ganzen Ausdehnung keinen Punkt gemeinsam.“

p. 67: „Aus den Lehrsätzen (33 und) 58 folgt unmittelbar, dafs man durch jeden Punkt einer Ebene in derselben immer eine Gerade ziehen kann, welche mit einer beliebigen Geraden

in derselben Ebene keinen Punkt gemein hat. Man sagt dann, die Geraden seien parallel oder gleichlaufend und nennt jede eine Parallele zur andern, beide auch zwei parallele Gerade oder zwei Parallele."

Lehrsatz: „Man kann durch jeden Punkt einer Ebene zu jeder in derselben liegenden Geraden eine und nur eine Parallele ziehen."

Beweis aus der Gleichheit zweier gleichliegenden Winkel indirekt. — Der Einwand, dafs Winkelflächen, weil unendlich, nicht miteinander verglichen werden können, wird zurückgewiesen. Dann schliefsen sich eine Reihe von Sätzen an. Schliefslich kommt Becker noch auf den unendlich fernen Schnittpunkt zu sprechen.

J. K. Becker, Lehrbuch der Elem.-Geometrie. — Berlin 1877.

p. 8: „Dreht sich eine Gerade a um einen Punkt A so, dafs sie dabei eine nicht durch A gehende Gerade b schneidet, fortwährend nach derselben Seite, so rückt der Schnittpunkt mit b immer weiter fort und zuletzt gelangt a, ohne die Ebene, welche sie beschreibt zu verlassen, in eine Lage, in welcher sie mit b keinen Punkt mehr gemein hat.

Befindet sich a in dieser Lage zu b, so sagt man, a sei parallel zu b, oder a und b seien parallele Gerade oder Parallele. Wird jedoch a in der Ebene noch weiter gedreht so schneidet sie die Gerade b wieder, aber der Schnittpunkt erscheint zuerst in weiter Ferne auf der andern Seite und kommt bei fortgesetzter Drehung dem Punkt A immer näher.

Wir können also definieren:

Eine Parallele zu einer gegebnen Geraden ist eine Gerade, welche mit derselben Geraden in derselben Ebene liegt, ohne einen Punkt damit gemein zu haben.

Zugleich ist zu merken:

Durch jeden Punkt einer Ebene geht zu jeder nicht durch ihn gehenden Geraden in derselben immer eine und nur eine Parallele.

Von zweien parallelen Geraden sagen wir, sie haben gleiche Stellung. Zwei Punkte, die sich auf parallelen Geraden bewegen, bewegen sich in gleicher oder entgegengesetzer Richtung."

„Da zwei sich nicht schneidende Gerade nur dann in einer Ebene liegen, wenn sie parallel sind, zwei sich schneidende aber immer in einer Ebene liegen, so zählt man auch die parallelen Geraden zu den sich schneidenden und sagt:

Parallele Gerade sind gerade Linien, die einen unendlich fernen Punkt gemein haben.

Dieser unendlich ferne Punkt ist aber nur eine Fiktion, kein wirklicher Punkt. Denn „unendlich ferne" heifst eben nichts anderes, als „nirgends vorhanden".

Was irgendwo sich befindet, ist immer in endlicher Ferne, wenn auch in noch so grofser."

Boymann, Lehrbuch der Mathematik. I. — Köln und Neuss 1877.

p. 6: „Haben zwei Gerade keinen Punkt gemeinsam, so haben sie gleiche Richtung; haben zwei Gerade gleiche Richtung, so sind sie gleichlaufend und werden Parallelen genannt."

Diese Erklärung findet sich p. 18 wiederholt.

Daran schliefsen sich die Folgerungen:

„Zwei gerade Linien in einer Ebene, welche unbegrenzt weit verlängert sich nicht schneiden, sind parallel."

„Zwei parallele Linien in einer Ebene können, soweit man sie auch verlängern mag, einander nicht schneiden."

„Zwei gerade Linien, welche beide einer und derselben dritten parallel sind, sind unter sich parallel."

Gilles, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Heidelberg 1877.

Nach zusammenfassenden Lagenbetrachtungen heifst es p. 8: „Haben die beiden Geraden keinen Punkt gemeinsam, so nennt man dieselben, wenn sie beide in einer und derselben Ebene liegen, parallele Linien."

p. 9 folgt die „fruchtbarere Betrachtungsweise."

„Der Ausgangspunkt zweier Geraden ist verschieden, die Richtung dieselbe."

Parallelverschiebung und Deckung.

„Solche Linien können keinen Punkt gemeinschaftlich haben."

„Gerade Linien, welche dieselbe Richtung haben, heifsen Parallelen."

Heinze, Die Elementargeometrie. — Berlin 1877.

p. 37: „Die in zwei Punkten *a*, *d* auf einer Geraden errichteten Perpendikel (*ab*, *dc*), welche in jeder beliebigen gleichen Länge das identische Rechteck (*abcd*) geben, haben überall eine der *ad* gleiche senkrechte Entfernung von einander und heifsen Parallellinien."

Polster, Geometrie der Ebene. — Würzburg 1877/78. (Progr.)

p. 15[1]): „Zwei Gerade, deren Richtungen in derselben Ebene liegen, ohne einander zu schneiden, heifsen parallele Gerade oder Zeillinien (Zeilen)."

Zusätze. „Gerade Linien, deren Richtungen einander decken, sind unter sich parallel.

Jede Gerade ist sich selbst parallel.

Zwei verschiedne Richtungen, von welchen die eine ganz auf einerlei Seite der andern liegt, sind parallel."

Erklärung von „ebener Strahlbündel", „Streifen", „Winkelabschnitt", „Streifenabschnitt".

---

[1]) Verfasser weist auf einen Artikel von sich hin über „Parallelen-Theorie" im 8. Hefte des 13. Bandes der „Blätter für das Bair. Gymnasial- und Realschulwesen" 1877, worin er dem 9. Axiom Euklids eine Fassung gegeben, „durch deren Anerkennung jeder Widerspruch auf dem neueren Standpunkte der Geometrie ausgeschlossen wird".

Er glaubt, dafs durch seine Arbeit der Standpunkt der sogenannten „Pangeometrie" überwunden, „welcher auf der Grundlage der Resignation erwachsen, in der jüngsten Zeit vorzugsweise als streng wissenschaftlich gegolten habe".

Die Annahme eines besondern Axioms sei notwendig. Die revidierte Fassung des 9. Axioms löse die Aufgabe.

„Lehrsatz. Die Richtung einer jeden von zwei verschiednen parallelen Geraden liegt ganz auf einerlei Seite der Richtung der andern." Der indirekte Beweis stützt sich auf den dritten der zitierten Zusätze.

p. 23—41 behandelt das dritte Kapitel „Theorie der Konvergenz und des Parallelismus". Auf die Winkeldefinitionen folgen die Kriterien der Konvergenz, die wiederum im wesentlichen mit Hülfe des dritten Zusatzes indirekt bewiesen werden. Das fünfte Kriterium ist identisch mit dem 11. Axiom. Dann schliefsen sich die Kriterien des Parallelismus an.

Wohlgemuth, Lehrbuch der Geometrie. — Libau 1877.

p. 4: „Zwei Gerade gleicher Richtung nennt man parallel."

„Da alle Geraden, die von einem Punkte auslaufen, verschiedne Richtungen haben, so ergiebt sich, dafs zwei Gerade gleicher Richtung niemals zusammentreffen können."

p. 6: „Aus dieser Fundamentaleigenschaft ergiebt sich aus dem Begriffe des Parallelismus ohne Weiteres, dafs zwei Geraden in eine Ebene, die beide zu einer dritten parallel laufen, auch untereinander parallel sein müssen, sowie ferner, dafs man durch einen Punkt zu einer Geraden nur eine einzige Parallele ziehen kann."

Winkelsätze mit Richtungsbeweis.

Develey, Anfangsgründe der Geometrie. — Stuttgart 1878.

p. 31: „Indem wir von geraden Linien ausgingen, die sich schneiden, haben wir erkannt, dafs es Linien gebe, die sich nicht schneiden z. B. zwei Senkrechte auf derselben Geraden.

Zwei gerade Linien aber, die sich nicht schneiden können, soweit man sie auch als verlängert annimmt, heifsen Parallellinien."[1]) „Ebene der Parallellinien."

„Zwei Parallellinien bestimmen die Lage einer Ebene."

Sätze und Beweise werden nach Bertrand gegeben, d. h. also durch Vergleichung von Parallelräumen und Winkelräumen.

---

[1]) Diese Worterklärung nach Lacroix und Legendre.

Focke und Krass, Lehrbuch der Geometrie. — München 1878.

p. 7: „Gerade Linien, die sich nicht schneiden, soweit man sie sich auch verlängert denkt, heifsen parallel."

Dann folgen die Winkelsätze. Beweis durch Deckung der Halbstreifen.

Schmitz-Dumont, Die math. Elemente der Erkenntnistheorie. — Berlin 1878.

p. 278: „Parallele Richtungen nennt man solche, welche zu einer beliebigen andern Richtung als der obigen denselben Richtungsunterschied haben, welche also auf sich selbst bezogen keinen Richtungsunterschied ergeben.

Parallele Richtungen können keinen gemeinsamen Ausgangspunkt haben, weil sie dann nicht verschiedne Richtungen wären, oder aber einen Richtungsunterschied hätten. Anschaulich spricht man dies aus, indem man sagt „Parallele Linien schneiden sich nicht". Parallele Linien darf man deshalb nicht Linien von gleicher Richtung nennen."

Junghans, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Berlin 1879.

p. 9: „Zwei gerade Linien heifsen parallel, wenn sie in derselben Ebene liegen, ohne einander zu decken, und sich niemals schneiden, soweit man sie auch verlängert."

„. . haben zwei Gerade gleiche Richtung, so schneiden sie sich nicht, soweit man sie auch verlängert, und werden parallel genannt."

„Grundsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden ist zu ihr nur eine Parallele möglich."

Es folgen hierauf die Winkelsätze mit den üblichen Beweisen, die sich auf den Grundsatz stützen: „Verschiebt man einen Winkel längs seines einen Schenkels, so ändert der andere Schenkel seine Richtung nicht."

Als weiterer Grundsatz folgt:

p. 13: „Zieht man aus dem Scheitel des einen von zwei innren entgegengesetzten Winkeln an parallelen Linien einen

Schenkel, so mufs dieser hinreichend verlängert die andere Parallele schneiden."

Korneck, Genetische Behandlung der Planimetrie. — Kempen 1879. (Progr. 125.)

p. 21: „Hat ein Punkt A von einer Geraden eine bestimmte Entfernung h, so kann man ihn in der Ebene so bewegen, dafs seine Entfernung von der Geraden immer $= h$ ist. Die entstehende Linie mufs eine gerade sein; denn läfst man die gleich bleibende Entfernung h immer kleiner werden, bis sie ganz verschwindet, so fällt die entstehende Linie mit der gegebenen Geraden zusammen und ist also ebenfalls eine Gerade."

„Wenn eine Gerade in allen ihren Punkten von einer andern Geraden gleich weit entfernt ist, so heifsen die Geraden einander parallel. Da ...., so können sie auch in ihrer unendlichen Ausdehnung keinen gemeinsamen Punkt haben, einander nie schneiden."

Leesekamp, Die Elemente der ebenen Geometrie. — Kassel 1879.

p. 6: „Haben zwei Gerade einen gemeinschaftlichen Punkt, so sagt man von ihnen, sie schneiden sich (treffen sich) in diesem Punkte. Jede der beiden Geraden hat dann eine andere Richtung nach diesem Punkte hin. Rückt der gemeinsame Punkt in immer gröfsere Entfernung, so nimmt der Unterschied in der Richtung beider Geraden immer mehr ab, bis einmal kein Unterschied mehr vorhanden ist, die Geraden also gleiche Richtung haben. Der gemeinsame Punkt ist dann in unendliche Ferne gerückt, für unsere Vorstellung also nicht mehr vorhanden. Solche Gerade heifsen gleichlaufend (parallel)."

p. 10 findet sich der Grundsatz: „Ist die Summe der innren gemischt liegenden Winkel zweier von einer Transversale geschnittnen Geraden gröfser oder kleiner als 2 R, so konvergieren die Geraden nach der Seite, auf welcher die Summe kleiner als 2 R ist."

Hierzu bemerkt der Verfasser:

„Um sich ein Bild von der Richtigkeit dieses Grundsatzes zu machen, denke man sich eine von zwei durch eine Transversale geschnittnen parallelen Geraden um ihren Schnittpunkt gedreht.“

Mink, Lehrbuch der Geometrie. — Elberfeld 1879.

p. 5: „Gerade Linien, die noch so weit verlängert sich nicht schneiden, sind parallel.“

„Grundsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden ist zu dieser nur eine Parallele möglich.“

p. 9 werden dann die Winkelsätze auf die Parallelen angewendet und das Verfahren der Deckung der Halbstreifen angewendet.

Schlegel, Geometrie. — Wolfenbüttel 1879.

p. 19: „Eine Gerade hat die Merkmale der Lage und Richtung.“

„Verschiebung einer Geraden ist Anderung ihrer Lage mit Beibehaltung ihrer Richtung. — Zwei Geraden mit verschiedner Lage aber gleicher Richtung heifsen parallel.“

„Durch einen aufserhalb einer Geraden gegebnen Punkt kann man nur eine Parallele zu der Geraden ziehen. Denn die Lage derselben ist durch den gegebnen Punkt und ihre Richtung durch die gegebne Gerade vollkommen bestimmt; also ist die Parallele selbst vollkommen bestimmt.“

Winkelsätze p. 40 f. mit Richtungsbeweis.

Schweder, Lehrbuch d. Planimetrie. — Riga 1879.

p. 5: „Zwei nicht zusammenfallende Gerade, welche gleiche Richtung haben, heifsen parallel.

Parallele Gerade können, soweit man sie auch verlängert, nie einander schneiden, da sie sonst einen Punkt und die Richtung gemein hätten, also zusammenfallen müfsten.

Zwei Gerade, die einer dritten parallel sind, sind es auch untereinander.

Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden läfst sich stets eine, aber auch nur eine Parallele zu dieser ziehen.“

Für die Winkelsätze natürlich Richtungsbeweis.

Henrici und Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. — Leipzig 1881.

p. 4: „Geschieht die Drehung einer Geraden um einen Drehpunkt S derart, dafs sie mit einer festen Geraden, Leitlinie, einen Punkt gemeinsam behält, so kann diese drehende Bewegung von einer Anfangslage der Geraden und des Schnittpunktes aus so vor sich gehen, dafs der Schnittpunkt den einen Halbstrahl oder dessen Gegenstrahl durchläuft; hiernach unterscheidet man die Drehung in dem einen Drehungssinn (dem Uhrzeiger entsprechend, Rechtsdrehung) oder in dem entgegengesetzten (Linksdrehung). — Der Schnittpunkt rückt dabei in der einen Richtung oder in der Gegenrichtung immer weiter, unbegrenzt weit hinaus. Die Gerade hat nun, wie die Anschauung zeigt, als Leitlinie die Eigenschaft, dafs durch die Drehungen in entgegengesetztem Sinne beide sich drehende Strahlen mehr und mehr in entgegengesetzte Richtungen kommen, und zwar in die Richtungen einer Geraden, welche die Leitlinie nicht schneidet. Über diese Lage hinaus kann die Drehung in demselben Drehungssinn so fortgesetzt werden, dafs der Schnittpunkt von der andern Seite wieder in seine ursprüngliche Lage rückt. Wir gelangen hiernach zu folgendem Grundsatz (Axiom der Parallelen): Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden giebt es immer eine einzige Gerade, welche erstere nicht schneidet, aber durch die geringste (eine unbeschränkt kleine) Drehung um den Punkt in eine Lage gebracht werden kann, in welcher sie die erstere Gerade bei gröfster (unbeschränkt grofser) Verlängerung nach der einen oder andern Seite schneidet. Diese Gerade heifst parallel zu ersterer."

„Thatsächlich kann ein erreichbarer Teil der Parallelen nicht von einem solchen Teil derjenigen Geraden unterschieden werden, welche die Leitlinie bei sehr weit fortgesetzter Verlängerung in der einen oder andern Richtung schneidet."

„Wird eine Gerade um einen Punkt gedreht, während sie mit einer geschlossnen Linie stets einen Punkt gemein hat, so kehrt sie schliefslich in ihre Anfangslage zurück. Dies ist nun auch bei der vollen Umdrehung längs einer Geraden der Fall; die Gerade verhält sich dabei als Leitlinie so, als ob

man durch ihre Verlängerung in der einen und andern Richtung zu einem einzigen bestimmten Punkte gelange, durch welchen die gedrehte Gerade in der parallelen Lage gehe. Man spricht daher auch von den Parallelen zu einer Geraden als von der Geraden nach dem unendlich fernen Punkt der letzteren, eine Redeweise, welche nur den engen Anschlufs der Parallelen zu einer Geraden an die die letztere schneidenden Geraden ausdrücken soll."

Menger, Grundlehren der Geometrie. — Wien 1881.

p. 5: „Die Geraden, welche nie zusammentreffen, heifsen parallele Gerade. Durch einen aufserhalb einer Geraden liegenden Punkt läfst sich nur eine Parallele mit derselben ziehen. Zwei parallele Gerade haben entweder gleiche oder entgegengesetzte Richtung."

Milinowski, Die Geometrie. — Leipzig 1881.

p. 23: „Zwei Gerade, welche dieselbe Richtung haben, heifsen parallel."

Winkelsätze mit Richtungsbeweis.

Petersen, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Kopenhagen 1881.

Nach dem Beweis für die Dreieckswinkelsumme und den Aufsenwinkel mittelst Drehung wird die Erklärung gegeben p. 18: „Zwei Linien heifsen parallel, wenn die gleichliegenden Winkel, welche sie mit einer sie schneidenden Geraden bilden, gleich grofs sind."

Darauf wird der Satz bewiesen: „Sind die gleichliegenden Winkel für eine schneidende Gerade gleich grofs, so sind sie es für jede."

Darauf folgt der Winkelsatz in folgender originellen Fassung:

„Bei jedem Durchschnittspunkte hat man vier Winkel; sind die Linien parallel, so ist jeder spitze Winkel der einen Gruppe gleich jedem spitzen Winkel der andern Gruppe und

Supplement jedes der stumpfen Winkel. Umgekehrt sind die Linien parallel, wenn eine von diesen Bedingungen erfüllt ist."

Ziegler, Grundrifs der ebenen Geometrie. — Landshut 1881.

p. 7: „Gerade in einer Ebene, welche bei beliebiger Verlängerung sich nicht schneiden, heifsen parallel."

„Durch einen Punkt kann man zu einer Geraden eine Parallele ziehen" mit Beweis. Dann als Axiom:

„Durch einen Punkt kann man zu einer Geraden nur eine Parallele ziehen."

Die Winkelsätze werden mit Hülfe kongruenter Dreiecke bewiesen.

„Denkt man sich die Parallelen und die Transversale unbegrenzt verlängert und die Figur mit allen Punkten in grofse Entfernung gerückt, so erscheinen die dreierlei Winkelpaare allmählich als Scheitelwinkel, kongruente Winkel und Nebenwinkel.

Am leichtesten wird dieser Hauptsatz der Parallelentheorie bewiesen mit dem Axiome: Der Parallelstreifen ist im Vergleich zur Ebene verschwindend klein."

Féaux, Lehrbuch der elem. Planimetrie. — Paderborn 1882.

p. 13: „Zwei Linien werden parallel genannt, wenn sie in einer gemeinsamen Ebene liegen und sich niemals schneiden, wofern sie auch ins Unendliche verlängert werden. Da solche Linien gleiche Richtung haben, da mit andern Worten ein Unterschied der Richtung bei ihnen nicht besteht, so sagt man auch wohl, parallele Linien seien solche, welche den Winkel Null bilden."

Als Hülfssatz folgt dann der bekannte Winkelsatz.

p. 14: „Axiom. Durch einen aufserhalb einer Linie AB gelegnen Punkt P ist nur eine Parallele zu AB ziehbar."

Daran schliefst sich eine ausführliche Behandlung der Parallelenlehre.

In einem Rückblicke konstatiert der Verfasser, dafs alle Versuche, das elfte Axiom Euklids zu beweisen, vergeblich gewesen sind und einfach darin bestehen, an Stelle dieses Axioms ein anderes zu setzen. So sei auch sein Axiom eigentlich ein Lehrsatz, der zu beweisen sei.

Die absolute und relative Null werden unterschieden:

$$(0 = a - a) \qquad \left(0 = \frac{1}{\infty}\right).$$

„Dem entsprechend giebt es auch einen zweifachen Parallelismus, einen absoluten und einen relativen. Das Wesen des absoluten (ideellen) Parallelismus besteht darin, dafs der Winkel zweier Geraden einer Ebene absolut 0 sei. Solche Linien schneiden sich nicht, selbst wenn man sie unendlich lang denkt; denn wenn sie sich schnitten, so bildeten sie einen gewissen, wenn auch noch so kleinen Winkel. — Das Wesen des relativen Parallelismus besteht darin, dafs zwei Linien einer Ebene sich im Unendlichen oder, was auf dasselbe hinauskommt, unter einem unendlich kleinen Winkel treffen.

Wegen der durch das Anschauungsvermögen gesteckten Grenzen fallen beide Parallelismen dem Wesen nach zusammen.“

Heger, Leitfaden für den geometr. Unterricht. — Breslau 1882.

p. 7: „Unter den durch einen Punkt A gehenden Geraden giebt es eine, aber auch nur eine, die eine gegebne Gerade nicht schneidet (Axiom).“

„Zwei Gerade einer Ebene, die einander nicht schneiden, heifsen parallel.“

Die Winkelsätze werden durch Deckung bewiesen, ihre Umkehrungen zum Teil indirekt.

Kommerell-Fink, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Tübingen 1882.

p. 6: „Stimmen zwei oder mehrere Gerade in ihren Richtungen vollkommen überein, so heifst man sie parallel.

Wenn man eine Gerade so verschiebt, dafs sie ihre ursprüngliche Richtung unverändert beibehält, so kann man sie in die Lage jeder ihr parallelen Geraden bringen.

Zwei sich schneidende Gerade zielen nach dem Schnittpunkt hin; parallele Gerade zielen nach einem gemeinsamen Punkt in gröfster Entfernung d. h. in unendlich grofser Entfernung hin: sie schneiden sich in unendlicher Entfernung. Parallele Gerade einer Ebene zielen sämtlich nach demselben unendlich enfernten Punkt hin."

„Zwei parallele Gerade haben keinen Richtungsunterschied, ihr Winkel ist gleich Null."

„Schreitet eine Gerade parallel mit ihrer ursprünglichen Lage fort, so mufs ihr Winkel mit einer andern festen Geraden eine unveränderliche Gröfse behalten und umgekehrt.

Daraus folgt: Sind zwei Gerade einer dritten parallel, so sind sie unter sich parallel."

p. 12 folgen die Winkelsätze mit Richtungsbeweis.

Löser, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Wiesbaden 1882.

p. 23: „Zwei Gerade heifsen parallel, wenn sie in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden, wie weit man sie auch verlängern mag.

Grundsatz I. Zu einer gegebnen Geraden ist durch einen aufser ihr liegenden Punkt jederzeit eine, aber auch nur eine Parallele möglich.

Grundsatz II. Zwei Gerade von verschiednen Richtungen in einer Ebene müssen hinreichend verlängert sich treffen, sie haben dann einen, aber auch nur einen Punkt mit einander gemein."

Die Winkelsätze werden als Kriterium der parallelen Lage bezeichnet, da es praktisch unausführbar ist, die Geraden ins Unendliche zu verlängern.

J. K. Becker, Die Math. als Lehrgegenstand der Gymnasien. — Berlin 1883.

p. 56: „Dabei können zwei Gerade etwa als parallel de-

finiert werden, wenn sie mit derselben dritten in derselben Ordnung dieselben Winkel bilden, wobei dann die Anschauung lehrt, dafs sie sich nicht schneiden."

Schindler, Die Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883.

p. 11: „Die einfachste Aufeinanderfolge von Geraden entlang an 2 sich schneidenden Geraden findet statt, wenn die eine dieser beiden Geraden selbst, ohne eigene Richtungsänderung, in der Richtung der andern Geraden bewegt wird . . . . ., so werden mithin gleich gerichtete Gerade als sich nicht schneidende oder, was dasselbe ist, als gleichlaufende Gerade wahrgenommen.

Parallel heifsen gleichlaufende, sich nicht schneidende Gerade.

Gleichgerichtete Gerade einer Ebene sind parallel und schneiden sich nicht."

„Parallelverschiebung einer Geraden heifst die Bewegung einer Geraden ohne eigne Richtungsänderung in der Richtung einer andern Geraden."

„Parallele Gerade lassen sich durch Parallelverschiebung zur Kongruenz bringen."

„Durch einen Punkt einer Ebene giebt es zu einer Geraden in derselben nur eine Parallele."

Hoch, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Halle 1884.

p. 8: „Zwei Gerade, welche in einer Ebene liegen und eine solche Lage haben, dafs sie sich nicht schneiden, soweit man sie auch verlängert, heifsen parallel."

„Verschiebt man eine Gerade, so sind die einzelnen Zwischenlagen der Anfangslage der Geraden parallel, woraus zu erkennen ist, dafs zwei parallele Gerade dieselbe Richtung haben."

Grundsätze: „Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden giebt es nur eine Parallele zu dieser.

Sind zwei Gerade einer dritten Geraden parallel, so sind sie auch untereinander parallel."

Kambly, Die Elementar-Mathematik. — Breslau 1884.

p. 8: „Grundsatz. Wenn zwei gerade Linien in einer Ebene so liegen, dafs sie, wie weit man sie auch verlängere, einander nie schneiden, so haben sie dieselbe Richtung."

„Erklärung. Zwei gerade Linien, die dieselbe Richtung haben, heifsen parallel."

Daraus verschiedene Folgerungen z. B. „Durch einen Punkt ist zu einer geraden Linie nur eine einzige Parallele möglich."

Dann folgen die Winkelsätze mit Richtungsbeweis.

Gauss, Die Hauptsätze etc. I. — Bunzlau 1885.

p. 79: „Zwei Gerade, welche keinen Punkt gemein haben, heifsen parallel."

p. 84: „Wenn zwei Wechselwinkel gleich sind, so sind die geschnittenen Geraden parallel."

Indirekter Beweis mit Hülfe der kongruenten Parallelstreifen.

Koppe, Planimetrie. — Essen 1885.

p. 10: „Zwei Linien, welche in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden, so weit man sie auch verlängert, heifsen parallel."

„Grundsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer Linie läfst sich zu derselben nur eine Parallele ziehen."

Das elfte Axiom durch Winkelvergleichung bewiesen.

Recknagel, Ebene Geometrie. — München 1885.

p. 15: „Gerade Linien, die beliebig verlängert keinen Punkt gemeinschaftlich haben, heifsen parallel."

Es folgen die Winkelerklärungen und Winkelsätze und ihre Anwendung auf die Parallelen mit Beweis durch Deckung der Halbstreifen; dann die Umkehrungen mit indirekten Beweisen.

Behl, Die Darstellung der Planimetrie. — Hildesheim 1886.

p. 10 werden die Möglichkeiten der Lagen zweier Geraden erörtert; „3) sie können keinen Punkt mit einander gemein haben und in ihrer Verlängerung auch keinen Punkt mit einander gemein bekommen, dann sagt man von den Linien: sie sind parallel.

Grundsatz: Parallele Linien können, soweit sie auch verlängert werden, sich niemals schneiden."

Kröger, Leitfaden f. d. Geometrie-Unterricht. — Hamburg 1886.

p. 4: „Gerade Linien, welche in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden, soweit man sie auch nach beiden Seiten verlängern möge, heifsen gleichlaufend oder parallel."

p. 91: „Lehrsatz. Durch einen Punkt kann zu einer Geraden nur eine Parallele gezogen werden." Beweis indirekt.

Stegmann, Die Grundlehren der ebenen Geometrie. — Kempten 1886.

Nach Erledigung der Winkelsätze heifst es

p. 18: „Gerade, welche sich nicht schneiden, heifsen parallel."

„Grundsatz. Zu einer Geraden kann durch einen Punkt (aufserhalb derselben) nur eine Parallele gezogen werden."

Anwendung der Winkelsätze und Beweis durch Deckung der Halbstreifen.

F. Fischer, Anfangsgründe der Math. II. — Leipzig 1887.

p. 19: „Zwei Gerade in einer Ebene können drei verschiedene Lagen haben. Sie haben entweder zwei Punkte gemeinsam und damit alle, sie fallen zusammen; oder sie haben nur einen Punkt gemeinsam, in welchem sie sich schneiden; oder sie haben keinen Punkt gemeinsam und sind parallel."

„Decken sich zwei Gerade oder sind sie parallel, so haben sie gleiche Richtung. Damit haben sie auch gegen jede dritte Gerade denselben Richtungsunterschied."

Lieber u. von Lühmann, Planimetrie. — Berlin 1887.

p. 6: „Gerade Linien, welche gleiche Richtung haben, nennt man parallel.“

Folgerungen:

1) „Parallele Linien können sich nie schneiden, so weit man sie auch verlängern mag.“

2) „Durch einen Punkt läfst sich zu einer Geraden nur eine einzige Parallele ziehen.“

3) „Zwei Linien, die einer dritten parallel sind, sind einander parallel.“

Winkelsätze mit Richtungsbeweis.

Rausenberger, Die Elementargeometrie. — Leipzig 1887.

p. 27: „Während sich zwei Punkte immer durch eine Gerade verbinden lassen, ist es bei zwei Geraden, auch wenn sie in einer Ebene liegen, nicht notwendig, dafs sie einen Punkt gemeinsam haben. Zwei in derselben Ebene liegende Gerade, welche keinen Punkt gemeinsam haben, heifsen parallel. Dafs parallele Gerade wirklich existieren, wird später nachgewiesen werden.“

„Die gegebene Definition der Parallelen ist wesentlich identisch mit der Euklid'schen; auf die Bolyai'sche kommen wir später zu sprechen. Die landläufige, dafs zwei Gerade parallel heifsen, wenn sie dieselbe Richtung haben, ist nichtssagend, da der Begriff der Richtung nicht vorher festgesetzt wird; aufserdem nimmt sie eine später zu erörternde Thatsache als selbstverständlich an, die in Wirklichkeit unerwiesen ist.“

p. 36 folgt die Behandlung des Parallelenproblems, eingeleitet durch die Winkelsätze. Dann folgt der Beweis, dafs die Geraden sich nicht schneiden können unter den bestimmten Bedingungen (Beweis von Ptolemäos). — Damit ist auch die Existenz von parallelen Geraden nachgewiesen. — Die Dreieckssätze schliefsen sich an.[1])

---

[1]) Die Behandlung des Parallelenaxioms, die sich auf Seite 48 ff. findet, werde ich an anderer Stelle zur Erörterung bringen.

Seeger, Die Elemente der Geometrie. — Wismar 1887.
p. 4: „Zwei gerade Linien heifsen parallel, wenn sie keinen Punkt der Ebene mit einander gemein haben.“
p. 13: Parallelentheorie. Winkelsätze. p. 15. XI. Axiom, Beweis ohne Zuziehung unendlicher Flächenräume unmöglich.[1])

Feld und Serf, Leitfaden f. d. geometr. Unterricht. — Wiesbaden 1888.
p. 3: „Geraden heifsen parallel, wenn sie bis ins Unendliche verlängert werden können, ohne dafs sie sich schneiden.“

Reidt, Planimetrie. — Berlin 1888.
p. 7 werden zwei Gerade betrachtet, von denen die eine sich um einen Punkt dreht. Die Lage der Schnittpunkte wird erörtert, das Überspringen von der einen Seite zur andern.
„Unter allen den verschiedenen Lagen befindet sich nun eine, welche zwischen dem Übergange des Schnittpunktes vom einen nach dem andern Ende liegt. In dieser Lage haben die beiden Geraden keinen Punkt gemeinsam und heifsen parallel.“
„Grundsatz: Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden läfst sich zu dieser nur eine Parallele legen.“
p. 13 folgen die Winkelbetrachtungen bei zwei geschnittenen Geraden in der üblichen Weise mit indirekten Beweisen.

Rottok, Lehrbuch der Planimetrie. — Leipzig 1888.
p. 2: „Zwei gerade Linien einer Ebene haben entweder gleiche Richtung mit einander, dann können sie, soweit man sie auch verlängern mag, sich nicht schneiden, weil sie sonst zusammenfallen müfsten,[2]) und solche Linien nennt man parallele Linien oder . . . .“

---

[1]) In einem Anhange, p. 133, teilt Seeger den Bertrand'schen Beweis mit. (Parallelstreifen und Winkelblatt.)

[2]) Es geht der Satz voraus: Haben zwei gerade Linien einen Punkt und die Richtung gemeinschaftlich, so fallen sie mit allen ihren Punkten zusammen.

Die Winkelsätze bei Parallelen werden durch Deckung der Schenkel bewiesen.

Spitz, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Leipzig 1888.

p. 20: „Schneiden zwei in einer Ebene liegende Gerade eine beliebige dritte Gerade in zwei verschiedenen Punkten und man denkt sich die eine Gerade längs der geschnittenen Geraden so hinbewegt, dafs jede Drehung ausgeschlossen bleibt, so wird dieselbe . . . oder mit der andern zusammenfallen. Dann sagt man, die beiden Geraden seien parallel oder gleichlaufend; die Art der gedachten Bewegung heifst Parallelbewegung."

„Lehrsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden läfst sich zu dieser nur eine Parallele ziehen."

Beweis indirekt. — Der Beweis der Winkelsätze ergiebt sich aus der Erklärung.

Frankenbach, Lehrbuch der Mathematik. I. — Liegnitz 1889.

p. 6: „Haben zwei Gerade keinen Punkt gemein, so sind sie entweder parallel oder kreuzend."

p. 16: „Zwei Parallelen teilen die Ebene in drei Felder; der von den Parallelen eingeschlossene Teil der Ebene heifst Streifen. Da zwei Parallelen keinen Punkt gemeinsam haben, so müssen sie die nämliche Richtung bestimmen, d. h. ihr Richtungsunterschied ist gleich Null."

p. 17: „Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden ist nur eine Parallele mit der Geraden möglich."

Indirekter Beweis.

Koch, Lehrbuch der ebenen Geometrie. — Ravensburg 1889.

p. 53: „Grundsatz. Durch einen Punkt ist zu einer Geraden nur eine Parallele möglich."

p. 54: „Liegt ein Punkt aufserhalb einer Geraden und dreht man eine durch den Punkt gehende Gerade um den Punkt, so rückt der Schnittpunkt der beiden Geraden ins Unendliche; nur einmal existiert kein Schnittpunkt; bei

weiterer Drehung rückt der Schnittpunkt von der andern Seite wieder aus dem Unendlichen herein. Um nun diesen einen Ausnahmefall sprachlich zu beseitigen, sagt man auch:

Parallelen schneiden sich im Unendlichen. Dieser Satz ist bloſs eine andere Ausdrucksweise für: „Parallelen schneiden sich nicht."

H. Müller, Über den ersten planimetrischen Unterricht. Berlin 1889. (Progr. 68.)

p. 14: „Die auf beiden Seiten unbegrenzten Geraden haben keinen Punkt gemeinsam; man nennt sie dann parallel.

Ist eine Gerade und ein Punkt auſserhalb derselben gegeben, so kann man wohl durch den Punkt unzählig viele Geraden legen, welche die erste schneiden, aber es ist nur eine einzige durch den Punkt gehende Gerade denkbar, welche zu der ersten parallel ist."

Veranschaulichung durch Zeichnung.

p. 25—27 folgen die Winkelsätze mit Anschauungsbeweis durch Deckung. Ich werde hierauf im vierten Kapitel zurückkommen.

Hub. Müller, Leitfaden der ebenen Geometrie. — Leipzig 1889.

p. 4 wird von der Symmetrie inbezug auf einen Punkt gehandelt und dabei der Fall der Deckung der Halbstreifen bei Drehung um den Mittelpunkt der Strecke erörtert, wobei das Resultat gewonnen wird, daſs bei Voraussetzung gleicher Wechselwinkel die Geraden sich nicht schneiden können.

„Zwei Gerade heiſsen parallel, wenn sie einander nicht schneiden, so weit man sie auch verlängern mag."

p. 7 kommen die Winkelsätze zur Besprechung (vgl. p. 4).

„Grundsatz. Wenn innere Wechselwinkel ungleich sind, so sind die geschnittenen Linien nicht parallel.

Die Anschauung zeigt, daſs sie sich auf der Seite schneiden, wo der kleinere Winkel liegt."

p. 8 wird der Satz bewiesen: Durch einen Punkt kann man nur eine Parallele zu einer Geraden ziehen.

p. 9 heifst es: „Parallele Gerade können als Linien angesehen werden, die einen unendlich fernen Punkt mit einander gemeinsam haben. Einer Geraden schreibt man nur einen unendlich fernen Punkt zu.“

Schram und Schüfsler, Vorschule der Mathematik. Wien 1889.

p. 122: „Zwei Gerade heifsen parallel, wenn sie in ihrer ganzen Ausdehnung keinen Punkt gemeinsam haben.“

„Beachtet man bei zwei parallelen Geraden auch ihre Richtungen, so können sie einerlei (oder gleiche) Richtungen haben oder entgegengesetzte Richtungen.“

p. 128: „Grundsätze. 1) Durch einen gegebenen Punkt kann man zu einer Geraden nur eine Parallele ziehen. 2) Wenn von zwei sich schneidenden Geraden die eine parallel fortschreitet, so ändern sich die vier Winkel nicht, welche sie mit einander bilden.“

Die Folgerungen sind klar.

Uth, Leitfaden der Planimetrie. — Kassel 1889.

p. 9: „Gerade heifsen parallel, wenn sie in einer Ebene liegend sich nicht schneiden, soweit man sie auch verlängert.“

Die Winkelsätze stützen sich auf den gleichen Richtungsunterschied, daher die Geraden gleich gerichtet. „Gleichgerichtete Strahlen aber können sich nicht schneiden.“

Die Umkehrungen werden indirekt bewiesen.

Haller von Hallerstein, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. — Berlin 1890.

p. 5 Erörterung der möglichen Lagen zweier Geraden.

„3) Sie schneiden sich nicht, soweit man sie auch verlängern mag; dann heifsen sie Parallelen.“

„Grundsatz: Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden kann man zu dieser nur eine einzige Parallele ziehen.“

Martus, Raumlehre. I. — Bielefeld 1890.

p. 17: „Gleichlaufende Gerade heifsen parallel.“ „

„Gleichlaufende gerade Linien haben keinen Punkt mit einander gemeinsam, auch wenn man sie beliebig weit verlängert denkt.“

Beweis der Winkelsätze durch Deckung der Parallelstreifen.

Herm. Müller-Zwerger, Geometrie. — München 1890.

p. 5 u. 6 die Winkelsätze.

p. 6: „Zwei Gerade in einer Ebene, welche mit einer dritten gleiche korrespondierende Winkel bilden, heifsen parallel.“

„Lehrsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden giebt es zu dieser stets eine und nur eine Parallele.“

„Parallele Gerade können sich nicht schneiden.“ Beweis indirekt. Zweiter Teil der Winkelsätze nebst Folgerungen.

Noack, Leitfaden der Elementar-Mathematik. — Berlin 1890.

p. 50: „Zwei gerade Linien in einer Ebene, die sich nicht schneiden, soweit man sie auch verlängert, heifsen parallel.“

„Grundsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden läfst sich zu derselben immer eine einzige Parallele ziehen.“

„Je weiter der Schnittpunkt zweier konvergenter Strahlen sich entfernt, um so mehr nähert sich die Lage der von parallelen Geraden. Man sagt daher auch von parallelen Geraden, sie hätten einen unendlich fernen Schnittpunkt.“

„Parallele Geraden haben einerlei Richtung.“

Die Winkelsätze werden durch Deckung der Halbstreifen bewiesen, die Umkehrungen indirekt.

Raschig, Erkenntnistheoretische Einleitung in die Geometrie. Schneeberg 1890. (Progr. 537.)

p. 35: Das 11. Axiom Euklids.

„Es zeigte schon Legendre, dafs hiermit identische Voraussetzungen sind:

Die Summe der inneren Winkel zweier Parallelen mit einer schneidenden Geraden beträgt zwei Rechte.

Die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt zwei Rechte.

Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden ist nur eine einzige die gegebene Gerade nicht schneidende Gerade möglich.“

p. 36: „In dem 11. Axiom Euklids oder einem der oben als äquivalent bezeichneten Axiome liegt die Charakteristik der ebenen Geometrie Euklids gegenüber einer pseudosphärischen.“

Nach einer kurzen Erörterung der einschlägigen Arbeiten von Donadt und Günther[1]) giebt R. das phoronomische Axiom Günther's wieder und formt danach den Thibaut'schen Beweis etwas um, indem er zugleich seine Übereinstimmung mit Günther konstatiert.

Es wird dann auf Petersen's Versuch[2]) eingegangen; „Petersen definiert zunächst: Unter Verschiebung einer Ebene will ich eine solche Bewegung einer Ebene in sich selbst verstehen, bei der eine Gerade längs sich selbst verschoben wird. Hiernach lautet sein Axiom: Wenn ein Punkt nach mehreren Verschiebungen einer Ebene in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, so befindet sich die ganze Ebene in ihrer ursprünglichen Lage.“

Raschig giebt dem Günther'schen Axiom den Vorzug, weil „es besonders anschaulich und evident sei, so dafs es nicht einen Beweis zu suchen gewissermafsen von selbst herausfordere.“

Röse, Elementargeometrie. — Wismar 1890.

p. 2: „Zwei Gerade in derselben Ebene haben entweder dieselbe Richtung und dann nennt man sie Parallelen oder gleichlaufende Linien oder . . . .“.

Die Winkelsätze stützen sich demgemäfs auf den Richtungsbeweis.

---

[1]) Man vergl. die betreffenden Zitate.

[2]) Petersen, Math. Annalen 29: Über die Winkel des Dreiecks.

Scholim, Lehrbuch der Geometrie. — Kreuzburg O. S. 1890.

p. 5: „Zwei gerade Linien, welche keinen Punkt gemeinsam haben, aber nach derselben Richtung laufen, heifsen parallel. Dieselben bleiben, soweit wir sie uns vorstellen können, gleich weit von einander entfernt und begegnen sich daher nirgends."

p. 11 folgen die Winkelsätze, die durch Verschiebung und Deckung bewiesen werden.

E. Fischer, Die Geometrie. — Berlin 1891.

p. 5: „Wegen der völligen Gleichheit sämtlicher Raumpunkte geht durch jeden derselben stets eine Gerade, welche mit irgend einer andern Geraden im Raume dieselbe Richtung hat. Linien gleicher Richtung heifsen parallele Linien."

Der Beweis der Winkelsätze stützt sich auf die Gleichheit der Richtungsunterschiede.

Holl, Lehrbuch d. Geometrie. — Stuttgart 1891.

p. 8: „Gerade liegen in gleicher Richtung d. h. sie sind gleichlaufend oder parallel, wenn sie einander nie schneiden, soweit man sie auch verlängert. — Parallelen haben stets gleiche Entfernung von einander."

p. 21 folgen auf die Winkelsätze zwei Zusätze:

„1) Sind zwei Gerade mit einer dritten parallel, so sind sie unter sich parallel.

2) Durch einen Punkt läfst sich mit einer Geraden nur eine Parallele ziehen."

Hočevar, Lehrbuch der Geometrie. — Wien 1891.

p. 10: „Zwei Gerade in einer Ebene, welche beliebig verlängert sich nicht schneiden, heifsen parallel oder gleichlaufend."

Beweis der Winkelsätze durch Deckung der Halbstreifen.

H. Müller, Die Elementar-Planimetrie. — Berlin 1891.

p. 23 werden die Winkel zweier Geradenpaare ausführlich erörtert. Daran schliefsen sich die Winkel bei

Parallelen, indem angenommen wird, dafs das eine Geradenpaar sich so bewege, bis sein einer Schenkel mit einem des andern Paares zusammenfalle. Es wird dann gesagt, p. 27: „Die Beobachtung führt demnach bei Benutzung der Erklärung: Haben zwei gerade Linien keinen Punkt mit einander gemein, so werden sie parallel genannt, zu dem Lehrsatz: Sind bei zwei von einer dritten geschnittenen Geraden zwei gleichliegende Winkel oder zwei Wechselwinkel einander gleich oder zwei Ergänzungswinkel supplementär, so sind die geschnittenen Geraden parallel."

Beweis durch Kongruenz der beiden Halbstreifen.

Rossmanith, Die Elemente der Geometrie. — Wien 1891.

p. 24: „Zwei Gerade, welche in einer Ebene liegen und nie zusamentreffen, soweit man sie auch nach beiden Seiten hin verlängert, werden gleichlaufend oder parallel genannt."

„Parallele unbegrenzte Gerade (Strahlen) haben nach beiden Seiten hin gleiche Richtungen."

„Grundsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden ist zu dieser nur eine Parallele möglich."

„Bei zwei Parallelen haben alle Punkte der einen gleiche Abstände von der andern."

---

v. Schmidt, Euklids 11. Axiom. — Moskau 1891.

p. 16: „Wenn in einer Ebene zwei gerade Linien eine dritte so schneiden, dafs die korrespondierenden Winkel gleich sind, so haben die schneidenden Linien gleiche Richtung. Solche Linien werden Parallellinien genannt."

Fenkner, Ebene Geometrie. — Braunschweig 1892.

p. 5: „Zwei gerade Linien haben keinen Punkt mit einander gemein, so weit man sie auch verlängern mag, oder sie sind parallel."

„Grundsatz. Zu einer geraden Linie kann durch einen aufserhalb derselben gegebenen Punkt nur eine Parallele gezogen werden."

Beweis der Winkelsätze indirekt.

Päd. Arch. — 34. Jahrg. — 1892.

p. 545: Schur, Die Parallelenfrage im Lichte der neueren Geometrie.

„Die neueren Forschungen haben erst die wahre Bedeutung der Erörterungen zu klarem Bewufstsein gebracht."

Philosophische Verquickung.

„Möglichst wenige, der unmittelbaren Anschauung entlehnte Grundbegriffe, genaue Definitionen, strenge Deduktionen."

„Die negative Definition giebt keine unmittelbare Evidenz."

Alle Beweise, aufser Legendre's, haben das Ziel verfehlt.

„Erst seit Gauss wirklicher Einblick in das Problem, weil sich mit den übrigen Axiomen sehr wohl die Negation der Parallelen vertrage."

Bolyai, Lobatschewsky. In sich widerspruchsfreie Geometrie unabhängig vom V. Postulat.

Bis jetzt wohl kein Widerspruch, fände sich vielleicht noch.

„Man hielt doch an der unendlichen Länge der Geraden fest, die (nach Riemann) keine Folge der übrigen Axiome sei."

„Zusammenhang zwischen Hauptsätzen und Postulaten."

„Riemann's Koordinatenausdruck für den Komplex der Postulate."

Quadrat der Entfernung zweier unendlich naher Punkte. Winkel. Das sind doch alles Euklidische Begriffe. —

„Daher unter Riemann'schen Voraussetzungen Gültigkeit der Euklidischen Geometrie in jedem unendlich kleinen Teile des Raumes."

Geodätische Linien und Flächen. — Riemann'sches Krümmungsmafs.

Freie Beweglichkeit der starren Körper = überall gleiche Beschaffenheit des Raumes = Raum konst. Riem. Krümmungsmafses.

Felix Klein: bestimmtes, vorher abgegrenztes Gebiet. — Unabhängigkeit der projekt. Geometrie vom Parallelenaxiom.

Sophus Lie — Helmholtz.

Hercher, Lehrbuch der Geometrie. — Leipzig 1893.

p. 5: „Es lassen sich auch verschiedene Gerade in einer Ebene zeichnen, welche gleiche Richtung haben. Solche Linien können sich, soweit man sie auch verlängern mag, niemals schneiden, denn sie müfsten sonst als Gerade, die einen Punkt und die Richtung gemein haben, zusammenfallen. Solche gleichgerichtete Gerade nennt man parallele Gerade oder Parallelen."

p. 10: „Grundsatz. Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden läfst sich zu derselben nur eine Parallele ziehen." Die Winkelsätze werden durch Deckung der Parallelen mittelst Parallelverschiebung bewiesen.

Die vorliegenden Zitate aus den Lehrbüchern haben gezeigt, dafs die verbreitetste der Definitionen von Parallelen diejenige ist, die sich auf den Begriff der Richtung stützt. Und dies ist, wie ich auch schon am Anfang des Kapitels bemerkte, wohl dem Umstande zuzuschreiben, dass einer oberflächlichen Betrachtung der sogenannte Richtungsbeweis — d. h. also der auf den Richtungsunterschied sich gründende Beweis — äufserst bequem und treffend erscheint. Ich möchte, da ich mich über diese Frage schon am Anfang des Kapitels ausgesprochen habe, hier nur noch folgendes zur Erwägung anheim geben. Macht man die mögliche Bewegung einer Geraden zum Ausgangspunkt der Betrachtung, so kann man drei Fälle unterscheiden:

1. Die Gerade bewegt sich in allen ihren Punkten und zwar

a) so, dass alle Punkte Nachbarpunkte ihrer ursprünglichen Lage bleiben (diese Bewegung heifst schieben),

b) so, dass alle Punkte eine neue Lage bekommen ohne einschränkende Bestimmung (desgl.).

2. Ein Punkt bleibt fest (diese Bewegung heifst drehen).

3. Zwei Punkte bleiben fest. (Bewegung = Drehung in sich; doch dürfte es richtiger sein, unter dieser Voraussetzung überhaupt keine Bewegung mehr als möglich anzuerkennen.)

Beschränken wir uns auf 1. und 2. und wählen die kürzen

— und wie ich glaube auch völlig deutlichen — Namen Schieben und Drehen, so würde man zum Begriff der parallelen Lage der Geraden im ersten Falle, zum Begriff des Winkels im zweiten Falle gelangen und so gleich einen Zusammenhang dieser beiden Gebilde erhalten. Bei beiden Bewegungen ändert sich die Richtung; es ist nicht richtig zu sagen: in dem einen Falle ändert sich die Richtung und ein Punkt bleibt fest, im andern wechseln alle Punkte ihre Lage und die Richtung bleibt fest. Wenn es z. B. in dem Zitat p. 317, Zeile 1 v. o. heifst: „Wenn man eine Gerade so verschiebt, dass sie ihre ursprüngliche Richtung unverändert beibehält, so kann man sie in die Lage jeder ihr parallelen Geraden bringen“, so ist dieser Ausdruck entschieden falsch. Behält eine Gerade bei einer Bewegung ihre ursprüngliche Richtung unverändert bei, so ist nur eine Verschiebung in sich möglich, nichts anderes. Ich bin gewifs, dass man mir hierin zustimmen wird. Die ungenügende Erkenntnis der wesentlichen Verhältnisse erzeugt denn auch solche verworrenen Definitionen, wie die folgende (s. S. 318): „Parallelverschiebung einer Geraden heifst die Bewegung einer Geraden ohne eigne Richtungsänderung in der Richtung einer andern Geraden.“ Die beiden Bewegungen Schieben und Drehen sind deutlich aufzufassen und deutlich auseinander zu halten.

Gewissenhafte Bearbeiter haben übrigens für nötig befunden bei der Erklärung der Parallelen des Umstandes zu gedenken, dass in jeder Geraden zwei Richtungen zum Ausdruck kommen, und haben deshalb folgende Definition aufgestellt: „Gerade von gleicher oder entgegengesetzter Richtung heifsen parallel.“ So kommt es denn, dass sie konsequenterweise folgenden Satz aussprechen (vergl. p. 307): „Zwei Punkte, die sich auf parallelen Geraden bewegen, bewegen sich in gleicher oder entgegengesetzter Richtung.“ Hier tritt die Unnatur der Parallelendefinition, die sich auf den Begriff der Richtung stützt, recht in Evidenz.

Zum Schluss möchte ich noch das eine erwähnen, dass es nicht heifsen darf: „Gerade, welche ...., sind parallel,“ sondern dass es lauten muss: heissen parallel.

IV. Kapitel.

Anwendungen zur Winkel- und Parallelenlehre.

Sind dem Schüler anschauliche Definitionen vom Winkel und von den Parallelen gegeben, so handelt es sich nun darum, mit diesen Begriffen zu operieren, Begriffen, die im wesentlichen ja nur eine Erweiterung der ursprünglichen Begriffe Richtung und Abstand sind. Gleich damals hatten wir an diese beiden ersten Begriffe Untersuchungen angeschlossen „Lagenbetrachtungen", auch hier schliefsen sich direkt an die Definitionen Untersuchungen über die wesentlichen Beziehungen an. Ich hatte am Anfang des § 3 im ersten Kapitel auf die Wichtigkeit der Kombinationslehre, insbesondere auf ihre praktische Anwendung hingewiesen, indem ich zugleich betonte, dafs wir auf diese Weise ein Gerippe für den Unterricht gewinnen, das dem Schüler leicht im Gedächtnis haftet und deshalb vorzüglich geeignet ist, ihn bei Wiederholungen nicht nur zu unterstützen, sondern überhaupt zur Festigung seines Wissens beizutragen. Eine gute Disposition ist die halbe Arbeit. Dieser Satz, der für den deutschen Aufsatz wohl allgemeine Anerkennung gefunden hat, gilt meiner Ansicht nach nicht weniger bei der Behandlung des mathematischen Lehrstoffs. Den Hauptvorzug einer guten Disposition aber bildet jedenfalls der organische Zusammenhang der einzelnen Teile, gewissermafsen die natürliche Ausbildung und Gestaltung, Nicht nur mufs die Anordnung eine naturgemäfse sein, die sich von Begriff zu Begriff ohne Gedankensprünge aufbaut, es mufs vor allem gleich bei Aufstellung der Disposition darauf geachtet werden, dafs sie als Repetitionsschema gelten kann.[1])

---

[1]) Derartige Repetitionsschemata pflege ich auch in den andern Disziplinen zu geben und zwar nach Durchnahme irgend eines Abschnittes, da natürlich die wesentlichen Elemente dazu nicht von vornherein bereit liegen, wie hier in der Planimetrie. Es mufs sich daher das Repetitionsschema erst an das Pensum anschliessen. Sorgt man dafür, dafs dieses Schema sich dem Gedächtnis der Schüler sicher ein-

Die Untersuchungen des § 3 im ersten Kapitel sind ein Beispiel, wie ich mir einen derartigen Aufbau und seine Gestaltung als Repetitionsschema denke. Durch die einfache Kombination der Elemente Punkt, Gerade, Kreis zu je zweien ergab sich ein einfaches, dem Gedächtnis leicht einzuprägendes Gerippe, das jederzeit bereit liegt und nur der Ausführung harrt. Jedoch befanden wir uns dort in einer günstigen Lage, die Kombination war eine sehr einfache, die Darstellung gestaltete sich demgemäfs auch aufserordentlich einfach. Im vorliegenden Falle bieten sich eine Reihe gleichwertiger Dispositionen, die je nach dem Geschmack des Lehrenden oder nach den Fähigkeiten der Lernenden mit einander wechseln können. Eine so völlig einartig sich darbietende Gestaltung der Untersuchungen wie dort ist an dieser Stelle nicht mehr möglich. Dagegen haben wir hier den grossen Vorteil, die Untersuchungen von verschiedenen Gesichtspunkten beleuchten zu können, und ich möchte als ganz besonders vorteilhaft empfehlen — vorausgesetzt dafs die Fähigkeiten der Lernenden dies erlauben — beim ersten Durchnehmen des Lehrstoffs und bei den recht häufig anzustellenden Wiederholungen mit den verschiedenen Dispositionen abzuwechseln. Doch, ich wiederhole dies ausdrücklich, mufs man gewiss sein, durch diesen Wechsel nicht eine Verwirrung hervorzurufen und so grösseren Schaden anzurichten. Allerdings handelt es sich ja auch hier um höchst einfache Betrachtungen, die rein synthetisch anzustellen sind; immerhin bieten sich gegenüber dem ersten Abschnitt Schwierigkeiten, die besonders darin liegen, dafs dem jugendlichen Geiste Beweise zugemutet werden für

---

prägt, so hat man die Gewähr, dafs auch die Einzelheiten im Anschlufs an die Disposition entweder völlig in dem Gedächtnis haften oder wenigstens jederzeit leicht in das Gedächtnis zurückgerufen werden können. Nicht die Einzelkenntnisse, sondern die Gesichtspunkte, nach denen sie sich ordnen, geben einen wahren Einblick in das Wesen des behandelten Themas und ermöglichen seine Beherrschung. Aus diesem Grunde sind auch Leitfäden zu bevorzugen, die eben nur die Ordnung des Stoffes geben, in allen Einzelheiten aber volle Freiheit der Behandlung gewähren. —

Man vergl. die mathematischen Repetitionshefte von Sänger und Sonne.

Sätze, die er bereitwilligst auch ohne solche als wahr anerkennt; ferner Sätze, deren Mitteilung ihm vorläufig unnötig erscheint, da er noch nicht weiss, was er damit anfangen soll.[1]) Als Hauptgrundsatz mufs ganz energisch festgehalten werden, dafs jedes dogmatische Vortragen, jede analytische Darstellungsweise in diesem Anfangsunterricht vermieden werden mufs. Rein synthetisch muss das Verfahren sein und fortwährend mufs der Schüler zur Mitarbeit herangezogen werden. Nichts muss ihm fertig geboten werden, er mufs sich selbst das Neue erarbeiten[2]); der Lehrende darf nur die Schritte leiten, den Weg zeigen, vor Abirrungen behüten, er darf aber nicht — ich bitte den trivialen Ausdruck zu entschuldigen — vorkauen; der Schüler mufs wissen, wozu er die Zähne hat und mufs sie tüchtig gebrauchen lernen. Ich glaube nicht, dass ein auf diese Weise erteilter Unterricht für den Lehrer besonders bequem ist; aber sicherlich wird er mehr Freude gewähren, da es nicht ausbleiben kann, dafs man das Wachsen der geistigen Kräfte bei den Schülern von Stunde zu Stunde fast, möchte ich sagen, beobachten kann. Ich kann wenigstens nach meinen bescheidenen Erfahrungen[3]) bezeugen, dafs die Schüler mit dem

---

[1]) Ich hoffe allerdings zuversichtlich, dafs durch Anordnung und Behandlung des Stoffes, wie ich sie in Vorschlag gebracht habe, gerade diesen Vorwürfen aufs wirksamste entgegengearbeitet wird. Eine ganze Reihe von Sätzen, die bei der bisherigen Behandlung des Stoffes weitläufige Beweise erforderten, bieten sich in der von uns mitgeteilten Darstellung in so einfacher, natürlicher Weise dar, dafs an einen Beweis gar nicht mehr gedacht zu werden braucht. Ich möchte hier nur als ein Beispiel erwähnen. die Beziehungen zwischen Kreis und Tangente, wie ich sie im § 3 des ersten Kapitels vorgetragen habe. Selbst der gewissenhafteste Mathematiker wird, wenn er nicht ein „Fanatiker des Beweisens“ ist, erklären müssen, dafs bei der Entwicklung des organischen Zusammenhangs der verschiedenen Lagen die Wahrheiten der Geometrie sich in so einfacher, überzeugender Weise darbieten, dafs Zweifel überhaupt nicht auftauchen können.

[2]) Ich halte diesen Punkt für einen der wichtigsten und will deshalb nicht verfehlen, noch ausdrücklich darauf aufmerksam zu machen.

[3]) Die Erfahrungen können naturgemäfs nicht allzu reich sein, da nach den strengen Vorschriften über den Betrieb des Unterrichts, über die Benutzung des Lehrbuchs etc. eine individuelle Behandlung des Lehrstoffs nur in sehr eng bemessenen Schranken sich bewegen kann.

grössten Interesse sich an dem Aufbau des Lehrstoffs beteiligen und dafs man ihnen die reine Freude, wenn sie das Richtige treffen und mit immer grössrer Sicherheit treffen lernen, wohl anmerkt. Die Zeiten, wo man pädagogisches Geschick als reine Naturanlage betrachtete, liegen wohl völlig hinter uns; allgemein wird Pädagogik als eine Wissenschaft betrachtet: aber in gewissem Sinne ist sie doch eine Kunst, und hier gilt, wenn irgendwo, der Satz, dafs höchste Kunst und reinste Natur sich aufs innigste nahe stehen müssen. Von diesem Grundgedanken ausgehend, müssen wir Lehrer bestrebt sein, den Lehrgang zu gestalten; von diesem Grundgedanken ausgehend, habe ich den Gang des geometrischen Anfangsunterrichts so gestaltet, wie ich ihn im vorliegenden Werke der Prüfung der Fachgenossen darbiete.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über die Motive, die mich bei dem Unterricht beeinflussen, kehre ich zu der speziellen Aufgabe, der dieses Kapitel gewidmet ist, zurück. Zunächst werde ich einige wichtige Dispositionen mitteilen, dann an der Hand eines dieser Entwürfe die Ausgestaltung im Einzelnen darstellen. Diese Einzelausgestaltung wird im allgemeinen nicht wesentlich von einander verschieden sein, wenn wir eine andre Disposition zugrunde legen, und es wird deshalb nicht nötig sein, für jede Disposition eine ausführliche Darstellung zu geben. Ich würde selbst auf die Mitteilung der andern Dispositionen verzichtet haben, wenn ich nicht dadurch dem Vorwurf entgehen zu können glaubte, dafs ich selbst dogmatisch vorginge, indem ich einen bestimmten Gang des Unterrichts vorschriebe. Aber selbst im Einzelnen sollen meine Mitteilungen durchaus nicht etwa bestimmte Vorschriften enthalten oder den Anspruch machen, dafs man sich nun ganz genau darnach richten müsse. Der Einzelunterricht hängt von zu viel Faktoren ab, als dafs sich generelle Vorschriften darüber geben liefsen, hier mufs Jeder den bestehenden Verhältnissen gerecht werden und den Lehrgang den Umständen gemäfs formen. Immerhin wird die Darstellung eines auf grund genauester Studien und reicher Kenntnis einschlägiger Litteratur gewonnenen und durchgearbeiteten Lehrgangs Anspruch auf das Interesse der Fach-

genossen erheben dürfen. Allerdings mufs ich gestehen, dafs ich selbst diesen Lehrgang nicht einseitig benutze, wohl kaum habe ich bis jetzt den Stoff einmal wie ein anderesmal behandelt, und dafs ich künftig ganz genau meine heutige Darstellung beibehielte, glaube ich auch nicht. Aber dafs sie mir als wesentliche Norm beim Anfangsunterricht auch fernerhin vorschweben wird, davon allerdings bin ich fest überzeugt. Denn nur beseelt von einer solchen festen Überzeugung ist man, meiner Meinung nach, befugt, seiner Ansicht Ausdruck zu geben.

Dispositionen zur Winkel- und Parallelenlehre können nun in folgender Weise gestaltet sein.

I. Disposition.

A. Ein Schnittpunkt.

(Winkelmessung, Benennungen, Nebenwinkel, Scheitelwinkel.)

B. Zwei Schnittpunkte.

a) Benennungen.
b) Voraussetzung eine der 16 Bedingungsgleichungen.
c) Zusammenhang mit den Parallelen.
d) Umkehrung der Winkelsätze.
e) Keine der 16 Bedingungen trifft zu. Damit Überleitung zu

C. Drei Schnittpunkte.

(Kombinationsfrage: Wie viel Schnittpunkte überhaupt möglich? Zusammenhang zwischen der Anzahl der Geraden und der Anzahl der Schnittpunkte.)

Die Winkel im und am Dreieck.

Der Grundgedanke aller Betrachtungen ist die Untersuchung der Beziehungen zwischen den verschiedenen Winkeln.

II. Disposition.

A. Eine Gerade.

Ebensowenig wie bei der Betrachtung eines Punktes bietet sich hier bei der Betrachtung einer Geraden Gelegenheit zu Untersuchungen. Ein Element — als solches wird die Gerade hier angesehen — bietet für sich nichts Merk-

würdiges, erst in seinen Beziehungen zu andern finden wir ein Objekt für unsre Betrachtungen.

B. Zwei Geraden.
(Zusammenhang mit § 3 des I. Kapitels.)

a) Kein Schnittpunkt.
b) Ein Schnittpunkt.

C. Drei Geraden.

a) Kein Schnittpunkt (alle drei Geraden parallel).
b) Ein Schnittpunkt.
c) Zwei Schnittpunkte (zwei Geraden parallel).
d) Drei Schnittpunkte.

III. Disposition.

A. Ein Winkel.

Grösse, Benennungen, Zusammenhang mit dem Kreis.

B. Zwei Winkel

a) an einem Scheitelpunkt.
Nebenwinkel, Scheitelwinkel.
b) an zwei Scheitelpunkten.
1) Komplementwinkel, Supplementwinkel, Vergleichung und Kongruenz.
2) Gleichliegende, Halbgleichliegende, Ungleichliegende.

Zu beachten ist, dafs gleichliegende Winkel dieselben[1]) Winkel, aber an zwei Scheiteln sind; halbgleichliegende: Nebenwinkel an zwei Scheiteln; ungleichliegende sind Scheitelwinkel an zwei Scheiteln.

C. Drei Winkel (und mehr).

Die Winkel in und an Figuren.

---

[1]) Ich gestehe zu, dafs diese Ausdrucksweise inkorrekt, zum wenigsten sehr eigentümlich ist; aber es gelang mir nicht, einen besseren Ausdruck zu finden; auch glaube ich, dafs ein Mifsverständnis ausgeschlossen ist, besonders im Vergleich mit der folgenden Darstellung.



IV. Disposition.

A. Ein Winkel.

B. Winkelpaare.

1) Eins für sich betrachtet.

2) Zwei oder mehrere im Zusammenhang.

C. Die Winkel bei Figuren.

Hiermit sind, soweit ich es übersehen kann, die möglichen Dispositionen für diesen Teil der Planimetrie aufgestellt. Doch müssen wir noch einer weiteren Gestaltung dieses Abschnittes gedenken, die sich durch die duale Gegenüberstellung der beiden Konstruktionselemente Strecke und Winkel ergiebt. Dieser Darstellung werde ich am Schlusse dieses Kapitels noch eine eingehendere Würdigung zuteil werden lassen.

Meinen Ausführungen werde ich an dieser Stelle die dritte Disposition zugrunde legen, mit der übrigens die vierte fast völlig übereinstimmt. Es liegt nur eine Verschiedenheit der Benennung vor, im Gange der Untersuchung herrscht völlige Gleichheit. Übrigens scheint mir die Bezeichnung „Winkelpaare“ viele Vorzüge zu besitzen, da in dem Namen zugleich schon die Thatsache liegt, dafs die beiden Winkel, die in Betrachtung kommen, in enger Beziehung zu einander stehen.[1]) Überall aber, wo man schon durch den Namen eine Andeutung geben kann, um was es sich handelt, sollte man die Gelegenheit nicht ungenützt vorüber gehen lassen.

Selbstverständlich ist, dafs man auch in der gewählten Disposition Einzelheiten der Ausführung nach einer andern Disposition gestalten kann. Überhaupt ist aufs energischste zu betonen, dafs dem einzelnen Lehrer volle Freiheit in der Gestaltung des Einzelnen zu gewähren ist — mehr scheint vor der Hand nicht zu erreichen zu sein. Der Unterschied

---

[1]) „Die Ausführung von Winkelmessungen wird oft dadurch erleichtert, dafs man zwei Winkel in ihrer gegenseitigen Beziehung betrachtet, indem man jeden einzelnen als Bestandteil (Element) eines Winkelpaares auffafst.“

Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie des Mafses. Braunschweig, 1887; p. 38.

zwischen akademischer Lehrfreiheit und dem Zwange des akademisch gebildeten Lehrers der höheren Lehranstalten ist aus Gründen falscher Humanität ein riesengroſser. Es hätte gewiſs auch andre Wege gegeben, um miſsbräuchlichen Ausschreitungen entgegen zu wirken. Ein Schlagwort der modernen Pädagogik ist die Individualisierung; aber wehe, wenn darüber die Individualität des Lehrers zugrunde geht. Den besten Erfolg wird doch immer eine kräftige Individualität haben; ihr Einfluſs auf die Schüler wird auch methodische Fehler in den Hintergrund treten lassen. Doch zur Sache!

§ 1. Ein Winkel.

Hat man die Definition des Winkels gegeben und auf grund des von uns aufgestellten psychischen Gesetzes[1]) festgelegt, daſs immer der kleinere Winkel gemeint ist, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bestimmt wird, so gilt es nun, die Bestimmungen über die Bezeichnung der Winkel zu treffen.[2]) Zunächst wird aber mitgeteilt, daſs der gemeinsame Ausgangspunkt der beiden Strahlen den Namen „Scheitel" (Scheitelpunkt) hat, daſs die Strahlen „die Schenkel" genannt werden. Daſs es auf die Länge der Schenkel gar nicht ankommt, geht aus unserer Definition des Winkels hervor, doch mag es nicht überflüssig sein, ausdrücklich noch darauf aufmerksam zu machen resp. diese Wahrheit von den Schülern selbst finden zu lassen. Die Festsetzung, daſs immer der kleinere Winkel gemeint sei, ist notwendig, da es nicht möglich ist, in der Ebene einen Winkel für sich zu zeichnen, wenn man nicht die zugehörige Fläche schraffieren will. In manchen Fällen

---

[1]) Vergl. Seite 5 u. 43.

[2]) Bürklen (Zur Lehre vom Winkel. — Kor. Bl. f. d. Gel. u. Realsch. 1891) p. 8: „Die Grösse eines Winkels — d. h. das was groſs ist — ist dasjenige der beiden durch die Schenkel bestimmten Ebenengebiete, das kleiner ist als die Halbebene. Soll das andere Gebiet ins Auge gefaſst werden, — was z. B. bei dem Zentriwinkel nötig ist, der zu einem stumpfen Peripheriewinkel gehört — so ist dem Wert Winkel „Konvex-" vorzusetzen.

Wo diese Festsetzung nicht getroffen wird, da bleiben Zweideutigkeiten bestehen."

wird sich dies empfehlen, aber es läfst sich nicht konsequent durchführen; wir befinden uns hier gegenüber der Darstellung des Abstandes zweier Punkte durch die Strecke im Nachteil. Würden wir den Drehungsabstand zweier Strahlen im Raume durch eine Fläche darstellen, so wäre die Eindeutigkeit sofort gewonnen. Aber da wir in der Ebene operieren und in dieser unsere Zeichnungen machen, so ist es unmöglich, einen Winkel für sich allein zu zeichnen. Es ist dies ganz analog dem Falle, dafs wir auf einem Kreise durch zwei Punkte nicht einen Bogen erhalten, sondern zwei: und deshalb auch festsetzen müssen, welchen von ihnen wir meinen. Mit Hülfe eines Blattes wird es also möglich sein, im Raume den Winkel eindeutig darzustellen. Man sollte nicht versäumen, dies den Schülern vorzuführen. Wie nun eine Strecke, wenn wir auf die Richtungen achten, noch doppeldeutig sein kann, so auch der Winkel, wenn wir die Drehungsrichtung in Betracht ziehen. Ob es ratsam sei, hierauf im Anfangsunterricht einzugehen, erscheint mir zweifelhaft. Abgesehen davon nämlich, dafs man mit dem Hinweis auf die Doppeldeutigkeit — sowohl bei der Strecke, wie beim Winkel — an die Auffassungskraft des Schülers schon erhöhte Anforderungen stellt, kommt als gewichtiges Moment in Betracht, dafs in der Behandlung der Planimetrie auf der Schule von dieser Doppeldeutigkeit nirgends eine Anwendung gemacht wird, so dafs man also den Schüler mit etwas belastet, womit er durchaus nichts anzufangen weifs. Ich bin daher dafür, diesen Punkt im Anfangsunterricht unberührt zu lassen und die Begriffe negativer Strecken und negativer Winkel gar nicht zu erwähnen.

Die Bezeichnung der Winkel ist dadurch erschwert, dafs man sich der kleinen griechischen Buchstaben nicht mehr bedienen kann; doch scheint mir ein Ersatz der zu sein, dafs man grofse lateinische Buchstaben mit einem Dächelchen darüber wählt, also z. B.: $\hat{A}$. Es ist damit der Vorteil verbunden, dafs man an den Ecken eine einheitliche Benennung hat. Überall aber, wo an einem Scheitel mehrere Winkel nebeneinander liegen, mufs man unbedingt von dieser Bezeichnung absehen, um jeder Zweideutigkeit aus dem Wege zu gehen. Hier ist es nötig, die Bezeichnung mit Hülfe dreier

Buchstaben zu wählen, so zwar, dafs man den Buchstaben des Scheitels in die Mitte setzt. Auch hier bin ich dafür, um einen Unterschied gegen das Dreieck von vornherein festzulegen, über den Buchstaben des Scheitels ein Dächelchen zu machen, also z. B.: $A\hat{B}C$. Würde man zugleich noch festsetzen, dafs bei der Benennung die Reihenfolge der Buchstaben so gewählt wird, dafs das Winkelfeld zur Linken liegt, — wie das ja auch für alle Figuren wohl allgemein üblich ist — so würde damit eine weitere Sicherheit in der Bezeichnung und eine Übereinstimmung gegeben sein.

Was nun die Einteilung der Winkel betrifft, so sind der Vollständigkeit halber der Vollwinkel und der Nullwinkel, die sich allerdings unter dem Bilde eines Strahles darstellen und zeichnerisch gar nicht von einander unterschieden werden können, nicht zu übergehen. Um so mehr kommt der Vollwinkel in Betracht, als er uns die Mafseinheit liefert; eine natürliche Mafseinheit, nicht eine willkürliche wie bei den Strecken. Hat der Strahl eine Vierteldrehung vollzogen, so heifst der entsprechende Winkel ein rechter Winkel.[1] Hierfür möchte ich gern den Namen „Richtwinkel“ vorschlagen, ein Name, der aus dem praktischen Leben sich ergiebt, z. B. ein Haus richten, d. h. unter rechtem Winkel aufbauen u. a. Es würde sich dies deshalb empfehlen, weil wir dann ein Wort haben, mit dem sich leichter operieren liefse, als mit dem Ausdruck „rechter Winkel“. Dreht man weiter, bis eine halbe Drehung vollzogen ist, die beiden Strahlen also vom Scheitel aus nach entgegengesetzten Richtungen sich erstrecken (eine Gerade bilden), so hat man den „Flachwinkel“. Winkel, die kleiner sind als der Richtwinkel[2]), heifsen „Spitzwinkel“; solche, die gröfser als der Richtwinkel sind, aber kleiner als der Flachwinkel, heifsen „Stumpfwinkel“. Alle Winkel, die kleiner als der Flachwinkel sind, haben ausserdem

---

[1]) Nach unsrer Ansicht besser der rechte Winkel.

[2]) Es wird sich durchaus empfehlen, nur den bestimmten Artikel zu gebrauchen, um auch dadurch schon anzudeuten, dafs es sich um etwas ganz Bestimmtes handelt. Um solche Sätze, wie „alle rechten Winkel sind einander gleich“, kommt man dann herum, ja es würde uns geradezu merkwürdig berühren, solche Sätze zu hören.

noch den gemeinsamen Namen „Hohlwinkel". Auf eine besondre Bezeichnung der Winkel, die gröfser sind als der Flachwinkel, kann man eigentlich ganz verzichten, da sie ja fast gar keine Rolle spielen, jedenfalls keine allgemeinen Sätze von ihnen vorkommen. Sie führten bisher den Namen „erhabne Winkel"; auch hier wäre es besser, ein Wort für den Begriff zu haben, ich wage aber keinen Vorschlag, da mir nichts besonders Passendes eingefallen ist.[1]) Der vollen Drehung entspricht „der Vollwinkel".

Von diesem gehen wir aus, wenn wir dazu übergehen, den Winkel als Grösse, als benannte Zahl in die Geometrie einzuführen, so dafs wir mit ihm rechnerisch operieren können.[2])

Die übliche Einteilung des Vollwinkels ist die in 360 gleiche Teile, die wir „Grade" nennen. Über die Veranlassung zu dieser Einteilung ist folgendes zu bemerken, was ich einem Vortrage entnehme, den M. Cantor am 3. Dezember 1891 im historisch-philosophischen Vereine zu Heidelberg gehalten hat, dessen Kenntnis ich der Güte des Herrn Vortragenden zu danken habe. „Zeit und Zeitrechnung" ist das Thema dieses Vortrags.[3]) Es heifst dort p. 192 (Sonderabdruck aus den neuen Heidelberger Jahrbüchern, 1892, Jahrgang II. Heft 2):

„Es mag wesentlich länger gedauert haben, bis das Bewufstsein erwachte, dafs noch ein gröfserer Zeitabschnitt, eine aus 12 Monaten gebildete Dauer, gewisse sich erneuernde Erscheinungen in ihrem Gefolge mit sich führte. Wärmere oder kältere Tage, das neu entstehende, das fallende Laub, das Aufspringen der Blütenknospen, das Reifen der Früchte, mit einem Worte die Jahreszeiten lenkten die Aufmerksamkeit

---

[1]) Vielleicht: Konvexwinkel (s. Bürklen l. c.).

[2]) Vorher müssen natürlich Übungen im Zeichnen der verschiedenen Klassen der Winkel durchgenommen worden sein, um die Schüler mit den Bezeichnungen vertraut zu machen.

[3]) Cantor bemerkt dazu in einer Fufsnote: „Das Material zu dieser Zusammenstellung stammt teils aus dem I. Bande der Vorlesungen über Geschichte der Mathematik des Verfassers, teils aus Abhandlungen von F. Kaltenbrunner in den Sitzungsber. der Wiener Akad. phil.-hist. Klasse LXXXII, 289—414 und LXXXVII, 485—586 und von F. Stieve in den Abhandl. der Bair. Akad. Hist. Klasse XV, 3. Abt., 3—98."

auf sich; der Begriff des Jahres war entstanden, des Jahres von 12 Monaten zu 30 Tagen, also von 360 Tagen.

Diese Jahreslänge ist mindestens mit hohem Grade von Wahrscheinlichkeit bei den ältesten Kulturvölkern nachzuweisen. Wenn in der Genesis (VII, 11 und VIII, 3 und 4) berichtet wird, Noah sei in die Arche gegangen, dann habe es am 17. Tage des II. Monates zu regnen begonnen, am 17. Tage des VII. Monates sei die Arche auf Ararat festgestanden, wenn beigefügt ist, die Wasser hätten sich nach 150 Tagen verlaufen, so entspricht die Gleichsetzung von 150 Tagen mit genau 5 Monaten der dreifsigtägigen Monatsdauer. Der babylonische Sintflutsbericht, den man für die Quelle der biblischen Erzählung hält, hat zwar in der durch Oppelt übersetzten Fassung jene Zeitangaben nicht, gleichwohl ist man berechtigt, den Babyloniern ebenfalls einen 30tägigen Monat, ein 360tägiges Jahr zuzuschreiben. War das Jahr unsrer Auffassung gemäfs irdischen Ursprungs, so gewann es doch nach und nach als Sonnenjahr eine astronomische Bedeutung. Wo allabendlich die Sonne unterging, erschienen, sobald es finster genug geworden war, um schwächere Lichtquellen bemerken zu können, gewisse Gestirne am westlichen Horizonte, und zwar nicht immer dieselben. Erst nach einem Jahre erkannte man die genau gleichen Gestirne wieder an der gleichen Stelle, und man kleidete diese Beobachtung in die Worte, die Sonne habe in Jahresfrist einen Umlauf um das Himmelsgewölbe vollzogen, jeden Tag den gleichen Weg, mithin beim Jahre von 360 Tagen den dreihundertsechszigsten Teil des Kreisumfangs, durchmessend, und so kamen die Babylonier dazu, 360 Grade des Kreises zu unterscheiden."[1])

Cantor fügt hinzu: „Als wir schon vor längerer Zeit diese naheliegende Vermutung veröffentlichten, glaubten wir Neues auszusprechen. Wir täuschten uns. Formaleoni hatte 1788 in seinem „Saggio sulla nautica antica dei Veneziani" bereits den Zusammenhang zwischen der Kreisteilung und der

---

[1]) Ich habe mir erlaubt, diese Worte wegen der Wichtigkeit für die vorliegende Frage gesperrt drucken zu lassen.

Anzahl der Tage im Jahre hervorgehoben; was er aber nicht wufste, war, dafs aus chinesischer Quelle eine Bestätigung möglich ist. Der oder die Verfasser des Tcheōu pei wissen, dafs das Sonnenjahr 365¼ Tage lang ist; sie teilen zugleich den Kreis nicht in 360, sondern in 365¼ Grade."

„Vollends gesichert ist das alte Jahr von 360 Tagen bei den Ägyptern."

Ich glaube im Sinne meiner Leser gehandelt zu haben, wenn ich diese Stelle aus dem Vortrage des hervorragendsten unter den Historikern der Mathematik *in extenso* mitgeteilt habe, da wir deutlich den Grund für die sonst merkwürdige Einteilung des Kreises (und damit des Winkels) in 360 Grade erkennen.[1]) Will man den Schüler mit dem historischen Grunde für unsere Kreisteilung (Winkelteilung) bekannt machen, so ist dagegen sicherlich nichts einzuwenden. Ich mufs allerdings gestehen, dafs ich auf dieser Stufe des Unterrichts mir nicht viel davon verspreche, aber in höheren Klassen ist es gewifs auch den Lernenden von Interesse, die Genesis der Winkel- (resp. Kreis-)teilung zu erfahren.

Zu erwähnen ist übrigens, dafs die Franzosen eine gewisse dezimale Teilung auch hier eingeführt haben, indem sie den Richtwinkel in 100 Grade einteilten, so dafs der Vollwinkel 400 Grade zählt.

Jeden Grad teilte man wieder ein in 60 Minuten, jede Minute in 60 Sekunden.

Auch die Entstehung dieser Bezeichnungen pflege ich gelegentlich den Schülern mitzuteilen. Ich glaube bemerkt zu haben, dafs auch viele Kollegen darüber nicht informiert sind, weshalb ich mir erlaube, kurze Angaben zu machen.

---

[1]) Bürklen, Zur Lehre vom Winkel (Korr.-Bl. f. d. Gel.- u. Realsch. 1891, 5. u. 6. Heft). p. 13: „Endlich wäre es wünschenswert, über den Ursprung der 360-Teilung, die dem Schüler in unsrer dezimalen Zeit doch etwas seltsam erscheinen mufs, mitzuteilen, dafs sie von den Chaldäern herrührt, die glaubten, dafs die Sonne zu ihrem Umlaufe um die Erde 360 Tage brauche; dem Vorwärtsschreiten an einem Tag entspricht also der Bogengrad."

(Hankel, Geschichte der Math., S. 79 und Treutlein u. Henrici, Lehrb. der Geometrie 1881. S. 113.)

minutum primum und *minutum secundum* zum erstenmal geteilt, zum zweitenmal geteilt: das ist die Entstehung der Namen, die konsequenterweise dazu hätte führen müssen, zwischen „Prime“ und „Sekunde“ zu unterscheiden. Ein Zufall hat es anders gefügt, so dafs das *minuere* im Namen der Minute erhalten geblieben ist.

Über die Wahl der Zahl 60 sagt Thieme[1]) (Posen): „Die Leichtigkeit, mit welcher der Kreis sich in sechs Teile zerlegen läfst, brachte bald den sechsten Teil des Vollwinkels und die Zahl 60 in den Vordergrund und gab wohl den Anlafs zur späteren Herrschaft des Sexagesimalsystems. Damit hängt auch die Einteilung des Winkels in 60 Minuten, der Minute in 60 Sekunden zusammen.“

Dieser Vortrag ist für die vorliegende Frage von Wichtigkeit. Es heifst dort weiter: „Die Vorzüge der Zahl 60 sind bekannt; trotzdem pafst die immer noch gebräuchliche Einteilung des Grades in Minuten und Sekunden in unser immer mehr zur Alleinherrschaft[2]) gelangendes Dezimalsystem nicht hinein. Die Schöpfer unsres metrischen Mafssystems hatten auch den Winkel nicht vergessen, sie hatten den rechten Winkel in 100 Grade und den Grad weiter dezimal geteilt; diese Änderung ist aber bisher wenig zur Aufnahme gelangt.“

Im Anschlufs an diesen Vortrag wurde von Thieme der Antrag gestellt, man möge sich für Beibehaltung der Gradeinteilung aussprechen, von der Einteilung des Winkelgrades in Minuten und Sekunden aber absehen und zur Dezimalteilung übergehen, ein Antrag, der von der Versammlung mit grofser Majorität angenommen wurde.[3])

An diese Erörterungen müssen sich nun meiner Ansicht nach reichliche Übungen im Gebrauch des Transporteurs anschliefsen, damit der Schüler auch praktisch mit dem zahlen-

---

[1]) Vortrag auf der Jahresversammlung des „Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und in den Naturwissenschaften“, abgedruckt (im Auszug) in H. Z. XXIV p. 232.

[2]) Und das mit vollem Recht!

[3]) Vergl. Schotten, Bericht über die Versammlung des Vereins etc. in H. Z. XXIV; p. 228. —

mäfsigen Winkel umgehen lernt.[1]) Man lasse Winkel zeichnen und mittelst des Transporteurs ihre Gröfse bestimmen. Sehr empfehlen wird es sich, mit einem grofsen Transporteur zu arbeiten, der an der Tafel Verwendung finden kann. Aber auch in seinem Heft mufs der Schüler solche Übungen anstellen. Man lasse Winkel in Graden nennen und bestimmen, zu welcher Klasse von Winkeln sie gehören, d. h. ob sie spitz oder stumpf sind etc. Auf diese Weise wird man den Schüler nicht nur an die Einteilung in Grade rasch gewöhnen, man wird ihn auch dahin bringen können, mit mehr oder weniger Sicherheit Winkel auf ihre Gröfse in Graden zu taxieren: Übungen also, die dem Taxieren von Strecken, die ja schon lange üblich sind, entsprechen.

Schon bei der Genesis der Einteilung zeigte sich der innige Zusammenhang zwischen der Winkelteilung und der Kreisteilung; die Übungen mit dem Transporteur haben diesen Zusammenhang schon praktisch dargelegt: es ist daher nun Zeit, auf diese Frage näher einzugehen.[2])

Hier ist es wieder ein Aufsatz des verdienstvollen Herausgebers der H. Z., der unsere Aufmerksamkeit besonders beansprucht. Er findet sich in Bd. XVIII der H. Z. p. 344, betitelt: „Winkelgrad und Bogengrad“. Verfasser klagt über die Unklarheit über diese beiden Begriffe. „Man unterscheidet nicht,“ heifst es, „oder nicht streng genug die Winkeleinheit

[1]) Nicht unwesentlich erscheint mir auch folgende Stelle aus Bürklen, Zur Lehre vom Winkel (Korresp.-Bl. f. d. Gel.- u. Realschulen 1891, 5. u. 6. Heft) p. 13: „Bezüglich der Gradeinteilung wird gewöhnlich gesagt: Man teilt den Vollwinkel in 360 gl. Teile und nennt einen solchen Teil Grad. Dies ist kurz und richtig, aber der Schüler wird die Lehrbücher vergeblich durchsuchen, um zu finden, wie diese Konstruktion ausgeführt wird, oder ob sie überhaupt streng ausgeführt werden kann. Es sollte daher beim Unterricht über die Ausführung einer empirischen Teilung etwas gesagt werden.“

Diese Frage scheint mir allerdings wichtig genug, um gründlich erörtert zu werden.

[2]) Vielleicht wird mancher Kollege auch diese Frage vor den Übungen mit dem Transporteur zu erörtern für richtiger halten; da beides unmittelbar aufeinander folgt, so ist die Reihenfolge, in der man diese Fragen behandeln will, selbstverständlich ohne jede wesentliche Bedeutung.

von der **Bogeneinheit.** Am klarsten ist dem Anfänger natürlich die Bogeneinheit, weil ihm aus der Anschauung oder auch aus seiner Selbstthätigkeit, d. h. aus der der selbstgefertigten Zeichnung des Kreisbogenstücks $\widehat{AB} = \frac{1}{360}$ eines Kreises geläufig ist. Nicht so der Winkelgrad, d. h. die Winkeleinheit oder der spitze Winkel $A\hat{O}B$ als Begrenzungselement eines Kreisausschnitts, zu welchem jener Bogengrad gehört und von denen 360 nebeneinander gelegt den ganzen Raum um den Winkelscheitel oder um den Kreismittelpunkt ausfüllen. (Vgl. die Fuſsnote aus Bürklen.) Dieser Winkelgrad als Winkeleinheit aufgefaſst ist deshalb dem Schüler nicht geläufig, weil er ihm im Unterricht nicht fest eingeprägt wird. Dies wäre aber um so notwendiger, als diese Winkelform bei ihrer Kleinheit weit schwieriger in der Vorstellung haftet, als die Form eines Bogens."

Hoffmann spricht sich dann dagegen aus, daſs der Bogen als Maſs des Winkels bezeichnet werde. „So verschiedene Gebilde lassen sich doch nicht durcheinander messen! Man kann Gebilde doch nur durch gleichartige messen, also: Winkel durch Winkel, Bogen durch Bogen, Gerade durch Gerade, Fläche durch Fläche u. s. w. Insofern haben diejenigen recht, welche den Ausdruck „der Winkel wird durch den Bogen gemessen" verurteilen."[1])

„Man könnte etwa sagen: dem Winkel entspricht der zugehörige Bogen, der Winkeleinheit die Bogeneinheit, d. i. dem Winkelgrad der Bogengrad."

Hoffmann klagt dann darüber, daſs das Zeichen ^{0} für beide Formen, für Winkel- und Bogengrad gebraucht

---

[1]) Vergl. Bürklen (l. c.) p. 12: „Jede Gröſse kann nur durch eine gleichartige gemessen werden, der Winkel nur durch einen Winkel."

„Dem Vielfachen eines Winkels entspricht das Gleichvielfache des zugehörigen Bogens und zu einem Bogen von bestimmtem Halbmesser gehört immer ein bestimmter Winkel. Es ist deshalb der Bogen ein Mittel, um Winkel zu vergleichen und zu messen. Es sollte aber die Redeweise unterlassen werden, daſs der Bogen ein Maſs des Winkels sei ..., so ist auch der Bogen nur Mittel zur Messung, aber nicht selbst Maſs des Winkels — Unterschied zwischen Winkel- und Bogengrad —."

wird. Hierbei kommt er auf die Verschiedenheit der Winkeldefinitionen zu sprechen und die daraus resultierende Verwirrung über den Begriff „Grad", wofür er aus einer Reihe von Lehrbüchern Belege anführt. Bei der von uns vorgeschlagenen Winkeldefinition würde Winkelgrad einfach den 360sten Teil einer vollen Drehung bezeichnen resp. ihm entsprechen, womit u. A. nach jede Unklarheit vermieden wird.

Zur Vermeidung von Irrtümern schlägt Hoffmann vor, für den Winkelgrad das Wort „Off" einzuführen. So wertvoll die vorliegende Behandlung der Frage und die Anregung Hoffmanns ist, so glauben wir doch kaum, dafs er mit diesem Vorschlage besondres Glück haben wird.

Was wir für nötig halten zu betonen ist das, dafs der Winkelgrad eine ganz bestimmte Gröfse ist, die ein- für allemal denselben Wert hat, während der Bogengrad mit dem Radius des Kreises sich ändert. Darin liegt der wesentliche Unterschied zwischen diesen beiden Begriffen, und dies kann man auch schon dem Anfänger klar machen. Wenn er sich aber darüber klar ist, so wird auch keine Verwechslung mehr möglich sein und jede Verwirrung ist aus der Welt geschafft.

Der Zusammenhang des Winkels mit dem Kreis mufs, wenn man in der Behandlung der Winkellehre so weit fortgeschritten ist, gründlich erörtert werden. Die gemeinsame Entstehung beider Gebilde durch Drehung liefert uns das Gemeinsame, die Veränderlichkeit des Bogengrades mit dem Radius des Kreises und die stetige Gröfse des Winkelgrades als des 360sten Teiles einer vollen Drehung liefert uns das trennende, das unterscheidende Merkmal. Beides mufs zur klaren Darstellung des Verhältnisses zwischen diesen beiden Begriffen kräftig betont und anschaulich dargestellt werden. Hier ist es besonders zu empfehlen, einen Winkel im Zusammenhang mit mehreren konzentrischen Kreisen zeichnen zu lassen, um so zu einer richtigen Erkenntnis der Beziehungen zu gelangen.

Noch eine Frage gilt es nun bei der Betrachtung eines Winkels zu erörtern, nämlich die, ob schon eine Konstruktionsaufgabe hier anzuknüpfen möglich ist. Praktisch läfst sich diese Frage bejahen, wenn man den Transporteur schon in

Gebrauch genommen hat; streng wissenschaftlich allerdings kann die Konstruktion eines Winkels, der einem gegebenen gleich ist, erst auf die Behandlung der Kongruenzsätze folgen, nachdem die Aufgabe gelöst ist, aus drei gegebenen Strecken ein (das) Dreieck zu konstruieren. Aber gerade dieser Übelstand lässt die Frage in den Vordergrund treten, ob nicht schon hier die Eindeutigkeit der Konstruktion eines Dreiecks aus den drei Seiten erörtert werden könnte, an die sich dann die Konstruktion eines einem gegebenen Winkel gleichen Winkels als direkte Anwendung ausschliefsen würde. Die Beantwortung dieser Frage möchte ich vorläufig noch offen lassen.

Hiermit dürfte die Behandlung der Lehre von einem Winkel erschöpft sein, und wir können nun zur Betrachtung zweier Winkel in ihren gegenseitigen Beziehungen übergehen.

§ 2. Zwei Winkel (Winkelpaare).

A. An einem Scheitel.

Da durch unsre Disposition schon eine bestimmte Voraussetzung, nämlich über die Lage der beiden Winkel, gemacht ist, so kann es sich bei den folgenden Untersuchungen nur noch um Gröfsenbeziehungen handeln. Hier ist sofort die merkwürdige Thatsache zu konstatieren, dafs nur eine Gröfsenbeziehung in Betracht gezogen worden ist. Weder Winkel, die sich — bei der vorausgesetzten Lage — zu einem[1]) Richtwinkel ergänzen, noch solche, die gemeinsam einen Vollwinkel bilden, haben besondre Beachtung gefunden und einen besondren Namen erhalten. Dafs man für das Winkelpaar, das sich zu einem Flachwinkel ergänzt, einen eigenen Namen aufgestellt, mag hauptsächlich seinen Grund in der Wichtigkeit des Flachwinkels bei der Dreieckslehre haben, obwohl es sich auch da weniger um das vorliegende Winkelpaar handelt als um die später zu erörternden Supplementwinkel.

Hat man zwei Winkel an einem Scheitel, die sich zu einem Flachwinkel ergänzen, so führen sie den Namen „Neben-

[1]) Hier ist es selbstverständlich gestattet, den unbestimmten Artikel zu gebrauchen (analog wie man auch von einer Geraden spricht). —

winkel". Es ist also von vornherein zu betonen, dafs wir bei diesen Winkeln auf Lage und Gröfse zu achten haben und dafs sie nur paarweis zu denken sind.[1]) Es lassen sich nun gleich eine grofse Reihe von Übungen an die Erklärung anknüpfen. Diese Übungen zerfallen in zwei völlig getrennte Klassen, in zeichnerische und rechnerische. Dabei bietet sich zugleich willkommene Gelegenheit, die Benennungen der Einzelwinkel gehörig zu wiederholen. Man wähle alle möglichen Winkel, Spitzwinkel, Richtwinkel, Stumpfwinkel und lasse dazu die Nebenwinkel zeichnen und sie klassifizieren. Dabei tritt dann sofort in Evidenz, dafs die Zeichnung des Nebenwinkels auf doppelte Art möglich ist, je nachdem man den einen oder den andern Schenkel über den Scheitel hinaus verlängert. Dafs diese beiden möglichen Nebenwinkel eines Gegenwinkels einander gleich sind, geht aus der Natur der Zeichnung und Erklärung hervor. Noch intensiver aber prägt sich dies ein, wenn man nach den Zeichenübungen — denn ich halte es für besser, erst diese anzustellen — zu Rechenübungen übergeht. Es wird ein Winkel gegeben — auch hier wieder von allen möglichen Klassen — und die Aufgabe gestellt, den Nebenwinkel zu berechnen. So wird es auch klar, dafs man von dem Nebenwinkel eines Winkels spricht, was bei der Möglichkeit der zweifachen Zeichnung dem Schüler vielleicht als merkwürdig auffällt. Von besonderm Interesse ist natürlich der Fall, wo die beiden Nebenwinkel einander gleich sind, also jeder ein Richtwinkel ist. Auf diesen Fall

---

[1]) Wenn wir also Sätze als Lehrsätze finden, wie „die Summe zweier Nebenwinkel beträgt $2R$", so ist das geradezu ein Nonsens. Nicht ein solcher Satz resultiert aus den Betrachtungen, sondern die Definition geht — abgesehen von der Lage — von dem Gesichtspunkte aus, dafs solche Winkel, welche mit gemeinsamem Scheitel und Schenkel zwei Rechte — oder wie wir lieber sagen, einen Flachwinkel bilden — Nebenwinkel heifsen. Diese inkonsequente Auffassung des eigentlichen Thatbestandes führt zu Weitläufigkeiten und überflüssigen Sätzen, deren Aufstellung vermieden würde, wenn man sich über das Wesentliche vollständig klar wäre. Dafs die Summe zweier Nebenwinkel einen Flachwinkel beträgt, ist nicht eine Eigenschaft der Nebenwinkel, sondern eins der beiden wesentlichen Momente der Definition.

mufs deshalb, und weil er auch sonst von Wichtigkeit ist, mit besonderer Gründlichkeit eingegangen werden.

Schon dadurch, dafs man die in der Zeichnung möglichen beiden Nebenwinkel konstruiert hat, ist man zu einem neuen Gebilde gekommen — für das ein früherer Schriftsteller den Namen „Kreuz" vorgeschlagen hat —, an dem man nun die Beziehungen des durch die beiden Verlängerungen entstandnen Winkels mit dem ursprünglichen in Betracht ziehen mufs. Dafs dies Gebilde mit zwei sich schneidenden Geraden identisch ist, wird jedem Schüler von selbst klar sein; dennoch dürfte es nicht überflüssig sein, besonders darauf hinzuweisen. Der Name des neuen Winkelpaares „Scheitelwinkel" mufs natürlich mitgeteilt werden.[1]) Die Beziehungen des Scheitelwinkels zum gegebenen Winkel aber — sowohl der Gröfse wie der Lage nach — mufs der Schüler selbst finden. Ich bemerke übrigens ausdrücklich, dafs es mir ganz wunderbar erscheint, dafs kein Lehrbuch für die Gleichheit der Scheitelwinkel einen andern Beweis zu erbringen weifs, als mit Hülfe der Nebenwinkel. Und doch ist, wenn man unsere Winkeldefinition zu Grunde legt, kein einfacherer, natürlicherer Beweis denkbar als der folgende. Man lasse die eine Gerade sich um ihren Scheitelpunkt drehen. Sowie sie dann mit der andern noch einen zweiten Punkt gemeinsam hat, fällt sie mit dieser völlig zusammen. Die beiden Scheitelwinkel erfordern also dieselbe Drehung — resp. entstehen durch dieselbe Drehung —, so dafs sie nach unserer Erklärung eo ipso auch als gleich erkannt werden. Soweit ich mich erinnere, habe ich diesen höchst einfachen, anschaulich evidenten Beweis für die Gleichheit der Scheitelwinkel nirgends gefunden.

Auch jetzt müssen wieder Zeichen- und Rechenübungen

---

[1]) Bei den Scheitelwinkeln liegt die Sache ganz anders wie bei den Nebenwinkeln. Hier ist nur Voraussetzung die besondre Lage, der Satz über die Gröfsenbeziehung zwischen den Elementen eines Scheitelwinkelpaares ergiebt sich als eine Eigenschaft, ist nicht konstituierendes Moment. Für diese Eigenschaft mufs also ein Beweis geliefert werden. Die Verwechslung der konstituierenden Eigenschaften und den Folgeeigenschaften ist leider eine sehr verbreitete und trägt die gröfste Schuld an Unklarheiten über geometrische Begriffe.

angestellt werden, die dann Sätze liefern, wie die folgenden: „Gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel“, „Gleiche Winkel haben gleiche Scheitelwinkel“ und deren Umkehrungen. Ich halte es für wichtig, schon bei diesen einfachen Sätzen auf die Umkehrungen zu achten, deren Bedeutung für die Ausbildung des folgerichtigen Denkens mir noch nicht hinreichend gewürdigt zu sein scheint. Meistens wird aber auf Umkehrungen erst bei schwierigeren Sätzen eingegangen, wo die wesentliche Beziehung, die Vertauschung von Voraussetzung und Folge, durch Schwierigkeiten andrer Art verdeckt oder wenigstens in den Hintergrund geschoben wird. Stellt man dagegen derartige Übungen schon bei den einfachsten Sätzen an, so wird der Schüler über das Wesen der Umkehrung völlige Klarheit erlangen und ein richtiges Urteil über die Möglichkeit von Umkehrungen und über ihre Gültigkeit gewinnen, was ihm dann später zu grofsem Vorteil gereichen wird. Ich halte, wie gesagt, gerade die Übungen im Umkehren für aufserordentlich wichtig zur Ausbildung eines folgerichtigen Denkens und Urteilens.

Dafs die beiden — konstruktiv möglichen — Nebenwinkel eines Winkels ihrerseits wieder ein Paar Scheitelwinkel bilden, darf natürlich nicht unerwähnt bleiben.

Hiermit ist die Betrachtung von Winkelpaaren an einem Scheitelpunkt erledigt: wir haben gesehen, dafs sich schon reiches Material zu Übungen bietet und dafs schon bei diesen einfachen Gebilden Gelegenheit zur Entwicklung von Sätzen und zur Ausbildung des Anschauungs- und Urteilsvermögens ist. Gerade auch der Zusammenhang zwischen Zeichnen und Rechnen, der hier hervortritt, hat wesentliche Bedeutung.

Noch eins gilt es hier zu erörtern, das ist die Addition und Subtraktion von Winkeln. Rechnerisch hat das ja gar keine Schwierigkeiten, zeichnerisch mufs aber wohl der Lehrer den richtigen Weg erst finden lassen. Wie bei der Addition von Strecken darauf zu achten ist, dafs die Strecken einen gemeinsamen Punkt haben, so auch hier die Winkel; aber damit ist es nicht genug, die beiden Winkel müssen aufser dem gemeinsamen Scheitel auch einen Schenkel gemeinsam haben. Wie die Strecken müssen sie in einer Ebene liegen,

bei der Addition nebeneinander, bei der Subtraktion aufeinander. Hier zeigt sich, dafs es gut ist, wenn man den Schüler mit dem Begriffe der negativen Winkel verschont hat. Denn derartige Beziehungen würden ihn nur irre machen. Wir betrachten eben den Winkel als ein vollendetes Gebilde in diesen Fällen ohne Rücksicht auf die Bewegung, aus der er hervorgegangen.[1])

Die hier angedeuteten Übungen im Addieren und Subtrahieren von Winkeln müssen in ausreichendem Mafse angestellt werden, um den Schüler völlig vertraut mit dieser Sache zu machen. Ihr Zusammenhang mit den Übungen bei Nebenwinkeln und Scheitelwinkeln ist übrigens gehörig zu betonen.

Wir gehen nun über zu

b. An zwei Scheiteln.

Bei der Betrachtung der Winkel an zwei Scheiteln müssen wir nun unterscheiden die Berücksichtigung der Lage und der Gröfse. Wir wollen zunächst nur die Gröfse in Betracht ziehen. Es handelt sich dann um folgende Arten von Winkeln: „Komplementwinkel" und „Supplementwinkel"; ferner gehört hierher die Vergleichung zweier Winkel hinsichtlich ihrer Gröfse. Kommt dann die Berücksichtigung der Lage in Betracht, so bieten sich der Betrachtung dar die gleichliegenden, halbgleichliegenden und ungleichliegenden an den Schnittpunkten zweier Geraden mit einer Transversalen.

Der erste Begriff aber, den wir hier zu erörtern haben, ist derjenige der „Komplementwinkel". Man versteht darunter zwei Winkel, welche ohne jegliche Rücksicht auf ihre Lage genommen gleich dem Richtwinkel sind. Nur auf die Gröfse der Winkel kommt es an. Es ist merkwürdig, dafs wir für den Fall, dafs auch die Lage mit gemeinsamem Scheitel und Schenkel in Betracht kommt, hier keinen besondren Namen haben. Ich habe weiter oben schon auf den

---

[1]) Ich will übrigens nicht unerwähnt lassen, dafs noch weitere Betrachtungen möglich sind, aus denen z. B. Sätze gewonnen werden wie: „Die Halbierungslinien eines Nebenwinkelpaares bilden einen Richtwinkel." „Die Halbierungslinien eines Scheitelwinkelpaares bilden eine Gerade."

vermutlichen Grund hingewiesen. Die besondre Lage am gemeinsamen Scheitel gilt aber hier nur als ein unwichtiger Spezialfall. Es wird sich empfehlen, bei der Erörterung der Winkelbeziehungen hierauf mit Nachdruck aufmerksam zu machen.

Als zweiter neuer Begriff ist derjenige der „Supplementwinkel“ zu erörtern. Winkel, deren Summe gleich einem Flachwinkel ist, führen diesen Namen. Nebenwinkel sind also eine besondre Art von Supplementwinkeln. Doch ist hier, ebenso wie bei den Komplementwinkeln, hervorzuheben, dafs die Zahl der Winkel ganz unwesentlich ist: es können so viele sein, wie sie wollen, wenn nur ihre Summe den Flachwinkel beträgt, so heifsen sie Supplementwinkel, wie dort, wo ihre Summe gleich dem Richtwinkel ist, der Name Komplementwinkel üblich ist. Auch dieser Punkt ist als wesentlich besonders zu betonen, schon deshalb, weil wir gleich bei der Winkelsumme im Dreieck mehr als zwei Winkel als konstituierende Elemente des Flachwinkels haben. Überhaupt ist es auffallend, dafs zwar alle Lehrbücher die Erklärung des Begriffes Supplementwinkel bringen, im weiteren Verlauf der Darstellung aber gar keinen Gebrauch davon machen. Vielleicht ist der Grund hierfür darin zu suchen, dafs nicht genügend in Berücksichtigung gezogen wird, dafs es bei diesem Begriffe auf die Anzahl der Winkel gar nicht ankommt.

Die Einübung der beiden Begriffe, das wirkliche Verständnis für ihr Wesen wird auch hier am besten mit Hülfe des Transporteurs geschehen. Reichliche Übungen müssen den Schüler mit den beiden neuen Begriffen vertraut machen und die geschickte Wahl geeigneter Beispiele wird dem Lehrer besonders angelegen sein müssen.

Wir kommen nun zur Vergleichung zweier auseinander liegender Winkel hinsichtlich ihrer Gröfse. Zum erstenmal tritt die Forderung an uns heran, zwei Gebilde mit einander zu vergleichen, bei denen die Sache komplizierter liegt, wie bei der Vergleichung zweier Strecken. Das Hauptmoment aller Vergleichung tritt in den Vordergrund, nämlich die Voraussetzung resp. die Annahme, dafs wir ein Gebilde bewegen als Ganzes, so dafs es durch die Bewegung keinerlei Ver-

änderung als solches oder in seinen wesentlichen Bestandteilen erleidet. Die Annahme, dafs eine solche Veränderung überhaupt möglich ist, wenn wir bestimmte konstituierende Elemente des Gebildes als unveränderlich voraussetzen, scheint mir das eigentliche Wesen der Kongruenzlehre zu bilden. Nicht erst das Aufeinanderlegen, nein, diese Voraussetzung bildet das charakteristische Merkmal der sogenannten Kongruenz. Ich werde darauf noch später eingehend zurückkommen. Nehmen wir also an, dafs wir einen Winkel bewegen können, ohne dafs er dabei eine Veränderung seiner Gröfse erleidet, so ist es uns möglich, Winkel hinsichtlich ihrer Gröfse miteinander zu vergleichen, auch wenn sie uns nicht als benannte Zahlen, sondern zeichnerisch gegeben sind. Den Ausgangspunkt dieser Betrachtungen mufs der Fall geben, dafs uns Aussagen über die Gröfse der Winkel vorliegen. Hier sind nun wieder drei Fälle möglich:

1) $\hat{A} > \hat{B}$

2) $\hat{A} = \hat{B}$

3) $\hat{A} < \hat{B}$.

Diese Anordnung scheint mir, wie auch bei den Strecken, die richtige zu sein. Der zweite Fall mufs als ein ganz spezieller, als ein Grenzfall in gewissem Sinne, in den Rahmen der ganzen Anordnung sich einfügen. Auf keinen Fall dürfen wir von ihm ausgehen, wofür ich den Grund schon gelegentlich der Streckenvergleichung angeführt habe.

Bringen wir nun zwei Winkel mit Scheitelpunkten und einem Schenkelpaar zur Drehung, so wissen wir schon aus den Übungen beim Addieren und Subtrahieren zweier Winkel, dafs noch zwei Lagen möglich sind: nämlich so, dafs die Winkel nebeneinander und aufeinander liegen. Für unsere vorliegende Betrachtung kommt nur der letztere zur Berücksichtigung. Legen wir demgemäfs in der beschriebenen Weise den gröfseren Winkel auf den kleineren, so überragt er den kleineren um einen Winkel, oder wie wir uns auch ausdrücken können, der zweite Schenkel (die Benutzung der Worte „Anfangsschenkel“ und „Endschenkel“ würde vielleicht wegen der Analogie mit dem „Anfangspunkt“ und „Endpunkt“ einer

Strecke zu empfehlen sein) liegt aufserhalb des kleineren Winkels. Im zweiten Fall wird auch das zweite Schenkelpaar sich decken, im dritten liegt der Endschenkel des zweiten Winkels zwischen den Schenkeln des ersten. Von diesen drei Fällen ist natürlich der wichtigste der zweite, wo die beiden gleichen Winkel sich völlig decken, mit Scheiteln und Schenkeln aufeinander fallen.

Die folgerichtigen Umkehrungen führen uns dann weiter dazu, aus der Art des Aufeinanderliegens auf die Gröfsenbeziehungen der beiden Winkel Schlüsse ziehen zu können. Vor allen Dingen wichtig ist wiederum die Umkehrung des zweiten Falles, die uns lehrt, dafs Winkel, die sich in der angegebenen Weise decken, gleich sind.

Die hier angestellten Betrachtungen im Verein mit den analogen bei der Strecke (vgl. Kap. I, § 3) geben uns das nötige Material an die Hand, Figuren überhaupt durch Aufeinanderlegen miteinander zu vergleichen. So lange also, wie die Kongruenzsätze eine hervorragende Rolle in der Elementarplanimetrie spielen, werden die gewonnenen Resultate als eigentliche notwendige und ausreichende Hülfssätze — in Verbindung mit ihren Umkehrungen — für die Kongruenzlehre gelten dürfen.[1]) Dafs das eigentliche Wesen der Kongruenz, meiner Ansicht nach, darin liegt, dafs wir die Annahme machen, Figuren ohne Veränderung bewegen zu können, sobald wir gewisse konstituierende Elemente als unverändert annehmen, will ich auch an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich hervorheben. Eine genaue Untersuchung und Darstellung über diesen Punkt wird auch das Kapitel „Geometrische Hülfsbegriffe“, das ich mir für den nächsten Band vorbehalten mufs, bringen.

Doch läfst sich die vorliegende Untersuchung nicht ab-

---

[1]) Es ist von Wichtigkeit, gleich hier am Anfang auf die Bedeutung der Hülfssätze „Gleiche Strecken etc. . . . .“ und „Gleiche Winkel etc. . . . .“ aufmerksam zu machen und ihren wesentlichen Unterschied zu beleuchten. Ich will das hier nur kurz andeuten, indem ich darauf hinweise, das Zusammenfallen von Punkten ist die Folge von gleichen Strecken, das Zusammenfallen von Geraden hat seinen Grund in Gleichheit von Winkeln.

schliefsen, ohne dafs wir noch — vorgreifender Weise — die drei Begriffe Ähnlichkeit, Gleichheit, Kongruenz in Hinsicht auf Strecken und Winkel etwas näher betrachten.

So wenig die Strecken hinsichtlich ihrer Gestalt irgend ein unterscheidendes Merkmal darbieten — denn sie sind Teile der qualitativ eindeutigen Geraden —, so sehr kann man bei der Betrachtung der Winkel über diesen Punkt im Zweifel sein. Dem natürlichen anschaulichen Denken wird beispielsweise ein Spitzwinkel und der Richtwinkel oder Flachwinkel durchaus nicht gleichgestaltig erscheinen: und doch handelt es sich hier um etwas ganz anderes, als was wir sonst unter verschiedener Gestalt verstehen. Die Gestalt des Winkels ist nämlich allein abhängig von seiner Gröfse, nichts anderes mengt sich ein. Wenn wir daher von ähnlichen Winkeln sprechen wollten, so könnte darunter nichts anderes verstanden werden, als gleiche Winkel. Ähnlichkeit und Gleichheit sind hier identisch. Und da die Kongruenz zweier Gebilde von der Gestalt und der Gröfse abhängt, so ist ferner keine andere Auffassung möglich, als dafs ähnliche Winkel kongruent sind (unter Kongruenz die Möglichkeit des völligen Aufeinanderlegens zu verstehen). In der That tritt infolgedessen beim Winkel, ebenso wie bei der Strecke — wo dieselben Verhältnisse vorliegen — der Begriff der Ahnlichkeit völlig in den Hintergrund: und der Begriff der Gleichheit deckt sich vollständig mit dem der Kongruenz.

Bürklen äufsert sich zu dieser Frage in seiner öfters zitirten Schrift p. 5 so: „Die Gröfse ist freilich diejenige Seite am Winkel, auf die man am meisten zu sehen hat; aber so wenig die Gröfsenmessung die alleinige Aufgabe der Geometrie bedeutet, so wenig ist das Wesen eines Gebildes ausschliefslich an seine Gröfse gebunden.“ Hierzu mufs ich schon hier bemerken, dafs es in der Geometrie eben Gebilde giebt, bei denen dies doch zutrifft, nämlich Strecke und Winkel. Er fährt dann fort: „Auch wird bei den Definitionen andrer Gebilde, z. B. des Dreiecks, Dreikants, nirgends die Gröfse mit in die Definition gezogen, obwohl z. B. dem Dreikant ebenso eine Gröfse zukommt wie dem Winkel, deren Mafszahl sich auch, und zwar völlig unabhängig vom sphärischen Dreieck,

gewinnen läfst (Mack, Die Lehre vom Dreikant 1868). Dies ist nicht zufällig oder willkürlich. Beim Dreieck oder Dreikant ist bei gleicher Gröfse eine verschiedene Gestalt möglich; die gleiche Gestalt des Dreiecks läfst noch die Fälle der Kongruenz und Ähnlichkeit auseinander halten, weil bei gleicher Gestalt noch verschiedener Inhalt möglich; beim Dreikant kann Kongruenz von Ähnlichkeit nicht mehr unterschieden werden, weil bei gleicher Gestalt immer auch der Inhalt gleich; beim Winkel ist bei gleicher Gröfse keine verschiedene Gestalt möglich und es kann Kongruenz von Ähnlichkeit nicht mehr unterschieden werden, es ist bei gleicher Gestalt immer auch gleiche Gröfse vorhanden."

„Gröfse und Gestalt bedingen sich also, mit Ausnahme des Winkels, nicht gegenseitig und eindeutig."

Die vorliegenden Beobachtungen mögen genügen, um auf die Sonderstellung des Winkels (Strecke) hinsichtlich der Begriffe Ähnlichkeit, Gleichheit, Kongruenz aufmerksam gemacht zu haben. Im Unterricht darf es jedenfalls nicht versäumt werden, derartige Betrachtungen anzustellen, wenn auch auf dieser Stufe nicht der mathematische Begriff der Ähnlichkeit, sondern nur der des gewöhnlichen Lebens zur Grundlage genommen werden kann.

Auch an diesen Abschnitt Übungen mit dem Transporteur anzuschliessen, möchte ich als vorteilhaft empfehlen, ebenso wie bei der Addition und Subtraktion von Winkeln.

Bis hierher nahmen unsere Betrachtungen zweier Winkel an verschiedenen Scheiteln nur Bezug auf die Gröfse. Ich gehe nun über zu demjenigen Teil dieses Abschnittes, der auch die Lage zum Gegenstand der Erörterung macht. Den Ausgangspunkt und die Grundlage für diese Betrachtungen bildet das durch drei Gerade dargestellte Gebilde, an dem wir vorläufig nur die zwei Schnittpunkte, die eine der Geraden mit den beiden andern bildet, in Erwägung ziehen.

Betrachten wir das Gebilde, so bieten sich acht Winkel zur Untersuchung dar, an jedem Scheitel vier. Wie wir die an einem Scheitel liegenden Winkel paarweise zusammenfassen, ist schon erörtert, doch gilt es noch eins nachzutragen, nämlich die Erörterung, wie viele Nebenwinkelpaare an einem

Scheitel liegen und ebenso wie viele Paare Scheitelwinkel. Es ist diese Untersuchung wegen der folgenden Betrachtungen von Wichtigkeit. Es leuchtet nun ohne weiteres ein, dafs vier Nebenwinkelpaare und zwei Scheitelwinkelpaare an jedem Scheitel unterschieden werden können. Das sind die Beziehungen zwischen den Winkeln an einem Scheitelpunkt. Gehen wir nun über zu der Betrachtung der Winkelpaare, die an verschiedenen Scheiteln liegen, so kann jeder Winkel des einen Scheitels mit jedem Winkel des andern kombiniert werden; so ergeben sich 16 Winkelpaare. Als Typus genügt es, einen Winkel des einen Scheitels mit den vier Winkeln des andern Scheitels zu kombinieren. Als charakterisierendes Merkmal bestimmen wir die Lage gegen die Geraden, die wir der bequemeren Darstellung halber so unterscheiden wollen, dafs wir zwei der drei Geraden als geschnittene ansehen, die dritte als die Schneidende (Transversale). Die erste Klasse von Winkelpaaren umfafst dann diejenigen, welche an den verschiedenen Scheiteln gleiche Lage haben sowohl gegen die Geschnittnen, wie gegen die Schneidenden. Ich schlage dafür vor, den Namen gleichliegende Winkel zu gebrauchen, da uns so der Name gleich den wahren Zusammenhang zwischen den Elementen des Winkelpaares lehrt. Die zweite und dritte Klasse der Winkelpaare werden gebildet von Winkelpaaren, deren Elemente in Bezug auf die eine Art der Geraden gleich liegen, in Bezug auf die andre ungleich. Also gleich gegen die Schneidende, aber ungleich gegen die Geschnittenen, oder ungleich gegen die Schneidende, aber gleich gegen die Geschnittenen. Diese Winkelpaare dürften passend den Namen halbgleichliegende erhalten. Die vierte Klasse wird dann gebildet von den Winkelpaaren, deren Elemente sowohl gegen die Schneidende, wie gegen die Geschnittenen ungleich liegen und daher Ungleichliegende genannt werden mögen. Bisher hatte sich eine sichere Bezeichnung dieser Winkelpaare eigentlich nur für die letzte Klasse ausgebildet, sie hiefsen allgemein Wechselwinkel. Bei den andern aber variierte die Bezeichnung gar mannigfaltig, ja für die dritte Klasse war ein besonderer Name gar nicht eingeführt, sie wurde überhaupt fast durchgängig mit Stillschweigen übergangen. Ich werde

weiter unten auf verschiedene hierhergehörige Arbeiten in Hoffmanns Zeitschrift zurückkommen. Zu jeder der vier Klassen gehören vier Winkelpaare, da wir jeden Winkel mit den vier Winkeln am andern Scheitel kombinieren können, wie ich schon oben bemerkte. Wir haben also 16 Winkelpaare, die nun in folgendem Zusammenhang stehen. Nehmen wir von irgend einem Paar eine gewisse Voraussetzung an, so resultieren für die übrigen 15 auch ganz bestimmte Beziehungen.

Setzen wir z. B. voraus, dafs die Elemente eines gleichliegenden Winkelpaares gleich sind, so folgt, dafs dies für alle gleichliegenden gilt, ebenso für die ungleichliegenden, während die Elemente der halbgleichliegenden Winkelpaare Supplementwinkel sind. Dieser letztere Umstand hatte dazu geführt, der zweiten Klasse den Namen „Ergänzungswinkel" zu geben, was ich deshalb nicht für richtig halte, da dieser Name von einer aus einer bestimmten Voraussetzung resultierenden Eigenschaft hergenommen ist; ferner bildet die Rücksicht auf die Gröfse den Grund der Benennung, während doch das eigentlich Wesentliche die Lage ist. Der gröfseren Deutlichkeit halber will ich die Beziehungen zwischen den Winkelpaaren noch in einem ausführlicheren Schema darstellen.

Dies dürfte folgende Form haben:

Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten und es sind:

1) zwei gleichliegende gleich,
so sind a) je zwei gleichliegende gleich[1]),
b) je zwei halbgleichliegende supplementär,
c) je zwei ungleich liegende gleich;

2) zwei halbgleichliegende supplementär,
so sind a) je zwei gleichliegende gleich,
b) je zwei halbgleichliegende supplementär,
c) je zwei ungleichliegende gleich;

3) zwei ungleichliegende gleich,
so sind a) je zwei gleichliegende gleich,
b) je zwei halbgleichliegende supplementär,
c) je zwei ungleichliegende gleich.

---

[1]) Die gewöhnliche Form dieses Satzes, „so sind alle gleichliegenden Winkel gleich" scheint mir entschieden falsch zu sein.

Die Beweise für diese Sätze beruhen auf den Sätzen über Nebenwinkel und Scheitelwinkel, sowie auf den beiden oben gefundenen Sätzen „Gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel" und „Gleiche Winkel haben gleiche Scheitelwinkel", wozu weiter der Grundsatz kommt „Sind zwei Gröfsen einer dritten gleich, so sind sie untereinander gleich."[1]) Ein näheres Eingehen auf die Beweise kann ich mir ersparen, nur das mufs erwähnt werden, dafs man darüber im Zweifel sein kann, ob man alle Sätze auf die eine Voraussetzung zurückführt, oder ob man die schon gewonnenen Resultate benutzt und auf ihnen weiter baut. Hat man Zeit, so ist das erstere Verfahren als das gründlichere vorzuziehen, weil es zugleich reichliche Gelegenheit giebt, das von den Neben- und Scheitelwinkeln Gelernte anzuwenden und im Gedächtnis zu befestigen. Immerhin ist aber nicht zu verkennen, dafs die Beweise dadurch weitläufiger werden. Es mufs auch auf der andern Seite zugestanden werden, dafs weder wissenschaftlich noch methodisch irgend ein Bedenken vorliegt, gewonnene Resultate zum Ausgangspunkt für die Auffindung neuer Wahrheiten zu machen. Vielleicht wird es sich empfehlen, mit den beiden Verfahren beim ersten Durchnehmen und bei der Wiederholung abzuwechseln. Wie man aber auch vorgeht, jedenfalls ist daran festzuhalten, dafs man die Beziehungen zwischen den Winkelpaaren durch besonders reichliche Übungen zu vollkommner Klarheit bringen mufs und dafür zu sorgen hat, dafs die Schüler die Wahrheiten und ihre Beweise völlig zu ihrem geistigen Eigentume machen. Auch hier dürften sich wieder Übungen mit dem Transporteur anschliefsen. Hat man nicht schon früher darauf hingewiesen, so mufs jedenfalls jetzt die wichtige Wahrheit gelehrt werden, dafs diese praktischen Übungen nicht etwa eine Kontrolle für die Richtigkeit der Sätze abgeben sollen, sondern dafs umgekehrt unsere Beobachtungen am Transporteur durch die als wahr erkannten Sätze kontrolliert werden. So lernt der Schüler auch, Wert

---

[1]) Die Beweise sind natürlich auch in arithmetischer Form einzuüben. Hierbei ist ganz besonders auf eine korrekte Darstellung zu halten. — Man vergl. A. Sickenberger, Mathematische Orthographie. — H. Z. IV. p. 379—391.

auf genaue Beobachtung zu legen, und lernt ferner, dafs alle unsere Beobachtungen (sinnlichen Wahrnehmungen) von vielen Zufälligkeiten abhängen, wie z. B. unzureichenden Instrumenten, schlechter Zeichnung etc. Dem gegenüber lernt er dann den Wert einer absolut sicheren Erkenntnis und wahrer wissenschaftlicher Strenge erkennen und schätzen.

Es ist ferner darauf aufmerksam zu machen, dafs wenn eine der 16 Bedingungen eintritt, überhaupt nur zwei verschiedene Arten von Winkeln hinsichtlich der Gröfse vorkommen, und zwar allgemein vier untereinander gleiche Spitzwinkel und vier untereinander gleiche Stumpfwinkel. Wird einer der Winkel — immer unter der angenommenen Voraussetzung — ein Richtwinkel, so sind alle acht Richtwinkel. Auch dieser besondre Fall verdient besonders erwähnt zu werden. Natürlich müssen die Schüler diesen Satz selbst finden, der Lehrer mufs sie nur darauf führen durch die Frage, wie es wird, wenn ein Winkel ein Richtwinkel ist.

Es müfste sich nun der Satz anschliefsen: „Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten und es tritt eine der 16 Bedingungen ein, so bestehen die 16 Gleichungen für jede beliebige Transversale.“

Dafs dieser Satz richtig ist, ist anschaulich evident; ein strenger Beweis ist aber erst nach Absolvierung des folgenden Paragraphen möglich. Man möge also einstweilen auf diesen Satz hinweisen, indem man auch hier wieder die Schüler ihn finden läfst durch die Frage, wie steht es bei einer beliebigen andern Transversale; mufs aber bemerken, dafs man später noch einmal darauf zurückkommen werde, um ihn streng zu beweisen.

Schon in der Disposition hatte ich darauf hingewiesen, dafs die gleichliegenden Winkel als identische an zwei Scheiteln aufgefafst werden können, halbgleichliegende als Nebenwinkel an zwei Scheiteln, ungleichliegende als Scheitelwinkel an zwei Scheiteln. Aus unsern Betrachtungen geht hervor, dafs diese Auffassung natürlich nur dann gültig ist, wenn eine der 16 Gleichungen zur Voraussetzung gemacht wird.[1])

---

[1]) Man vergl. das Zitat aus Petersen, p. 314.

Ist man so weit vorgeschritten, so ist es nun an der Zeit, auf den Zusammenhang der Untersuchungen mit dem Parallelismus einzugehen. Es ist zunächst zu zeigen, dafs die beiden Geschnittnen im betrachteten Falle parallel sind und dann als Umkehrung zu lehren, dafs also bei Parallelen die 16 Gleichungen gelten: oder man zeigt zunächst, dafs bei Parallelen die 16 Gleichungen gelten und dafs folglich umgekehrt die von uns betrachteten Geraden parallel sind. Im letzteren Falle denkt man sich z. B. zwei Abstände gezeichnet, die nach unsrer Definition gleich sind. Verbindet man dann zwei gegenüberliegende Ecken (zieht eine Diagonale), so läfst sich die Gleichheit der ungleichliegenden Winkel leicht mit Hülfe der beiden kongruenten Dreiecke zeigen — wobei man allerdings den (vierten) Kongruenzsatz als richtig vorläufig annehmen mufs. Ich fürchte, dafs man gegen dieses Verfahren Einwendungen machen wird, doch glaube ich, dafs wirklich ernstliche Bedenken kaum berechtigt sein dürften, da die Lehre von der Kongruenz sich ja unmittelbar anschliefst und man dann Gelegenheit hat, auf diesen Punkt zurückzukommen. Noch einfacher gestaltet sich die Darstellung, wenn man die Symmetrie zu Hülfe nimmt.

Sind die Beziehungen der Winkelpaare an zwei Schnittpunkten gehörig durchgenommen und durch reichliche Übungen eingeprägt, so wird die Behandlung des Zusammenhangs mit den Parallelen keine besonderen Schwierigkeiten bieten. Es wird sich Gelegenheit finden, bei der Besprechung einschlägiger Arbeiten hierauf noch näher einzugehen. Wir betrachten nun den Fall, dafs keine der 16 Gleichungen statthat und kommen damit zu

§ 3. Drei (und mehr) Winkel.

Hiermit sind wir zu dem berühmten 11. Axiom gelangt. Ich halte es im Schulunterricht für ganz unbedenklich, dieses Axiom als anschaulich evident darzustellen.[1]) Kein Schüler wird daran zweifeln, dafs die Geraden, die von einer dritten

---

[1]) Man vergleiche noch zu diesem Punkte Hoffmann, die Prinzipien des I. Buches von Euklids Elementen; H. Z. III, p. 136 ff.

geschnitten werden, sich auf der einen Seite selbst schneiden, nämlich da, wo die Summe zweier inneren halbgleichliegenden — und zwar solcher, die auf einer Seite der Transversalen liegen — kleiner als eiu Flachwinkel ist. Damit sind wir dann zu drei Schnittpunkten gekommen, die Figur des Dreiecks bietet sich uns dar und es gilt nun, diese Figur auf ihre Eigenschaften zu untersuchen. Entsprechend dem Gange, den unsere Untersuchungen bis hierher genommen haben, handelt es sich natürlich nur um die Winkelbeziehungen beim Dreieck. Trotzdem sind hier die Bezeichnungen für die Stücke des Dreiecks anzugeben. Die Ecken werden mit grofsen lateinischen Buchstaben bezeichnet, die entsprechendeu Winkel mit den entsprechenden grofsen lateinischen Buchstaben mit einem Dächelchen, die Seiten mit kleinen lateinischen Buchstaben und zwar so, dafs eine Seite den gleichen Buchstaben hat, wie die gegenüberliegende Ecke.[1] Auch pflege ich daran festzuhalten, dafs die Bezeichnung der Figuren so eingerichtet wird, dafs die Fläche der Figur zur linken Hand liegt, wenn man in alphabetischer Reihenfolge von Ecke zu Ecke sich bewegt. Den Aufsenwinkel von $\hat{A}$ pflege ich mit $\hat{A}_1$ bezeichnen zu lassen, führe überhaupt von Anfang an eine konsequente Anwendung der Buchstaben durch, wie sie sich in der analytischen Geometrie als so sehr vorteilhaft erwiesen hat. Den Beweis für die Winkelsumme des Dreiecks nehme ich nach Thibaut durch, ein Beweis, der dem jugendlichen Geist ganz besonders einleuchtend erscheint. Doch gehe ich, wenn irgend möglich, gern noch weiter und dehne diesen Beweis auf jedes mögliche Vieleck aus. Die Thatsache, dafs die Summe der Aufsenwinkel bei den ebenen Figuren ganz unabhängig ist von der Anzahl der Ecken, dafs sie überhaupt einen konstanten Wert hat, ist leicht begreiflich und giebt den Schülern ein leichtes Mittel an die Hand, die Winkel-

---

[1] Die Bezeichnung der Punkte mit grofsen lateinischen Buchstaben, der Strecken mit kleinen lateinischen, der Winkel mit kleinen griechischen rührt von Euler her, wie Kober in seiner Besprechung des Ziegler'schen Lehrbuches in H. Z. Bd. I bemerkt. — Man vergl. Wiečorek-Wiečorekewič, Zur mathematischen Orthographie in H. Z. IV, p. 429.

summe jedes beliebigen Vielecks zu bestimmen. So viel Flachwinkel, als die Figur Ecken hat, weniger der konstanten Summe der Aufsenwinkel = zwei Flachwinkel, dies scheint mir der einfachste und leichteste Weg, die Winkelsumme der Vielecke zu lehren. Nimmt man das Axiom, das dem Thibaut'schen Beweis zugrunde liegt, einmal als wahr an, so ist seine Gültigkeit von der Anzahl der Ecken ganz unabhängig und die Verallgemeinerung des Thibaut'schen Beweises auf alle Vielecke völlig zuläfsig. Merkwürdigerweise ist diese Verallgemeinerung weder von Thibaut, noch — soweit meine Kenntnisse reichen — von irgend einer andern Seite bisher vorgeschlagen.[1]) Es ist übrigens zu empfehlen, daneben auch den üblichen Euklidischen Beweis zu geben. Aber auch hier möchte ich für eine kleine Änderung eintreten. Meiner Meinung nach ist nämlich der einzig richtige Ausgangspunkt der vom Aufsenwinkel. Erst wird mit Hülfe einer parallelen Hülfslinie bewiesen, dafs der Aufsenwinkel gleich der Summe der von ihm getrennt liegenden[2]) Innenwinkel ist, daran schliefst sich dann als Folgesatz die Lehre von der Summe der Winkel im Dreieck an. Schlägt man nämlich den gewöhnlichen Weg ein, so stehen diese beiden so eng zusammenhängenden Sätze ganz unvermittelt nebeneinander, was doch gewifs nicht zur klaren Auffassung der vorliegenden Verhältnisse beiträgt.

---

[1]) Man vergl. J. H. T. Müller, Über die Summe der Winkel in ebenen geradlinigen Vielecken. — Gr. Arch. II, p. 106. Heinen, Über die Summe der Winkel im Vielecke. — Gr. Arch. 29, p. 474.

[2]) Dies ist die einzig zulässige Bezeichnung statt der üblichen „gleich der Summe der gegenüberliegenden"; von einem Gegenüberliegen ist gar keine Rede. Im Viereck giebt es gegenüberliegende Winkel, aber dieses Beispiel zeigt uns auch zugleich recht deutlich, wie unpassend diese Bezeichnung für die Lage eines Aufsenwinkels und den von ihm getrennt liegenden Innenwinkel beim Dreieck ist. Man vergl. Meutzner, Zum Kapitel Inkorrektheiten, in H. Z. 13, p. 25: „In vielen Lehrbüchern der Geometrie kommt folgender Satz vor: „Jeder Aufsenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkel". Dieser Satz findet sich unzählige Male in dieser Fassung auch sonst. Ist es aber gerechtfertigt, aus Furcht vor einem negativen Begriffe („der beiden ihm nicht anliegenden Dreieckswinkel") etwas entschieden Sinnloses zu sagen?"

Nicht unerwähnt darf natürlich bleiben, daſs an jeder Ecke zwei Auſsenwinkel gezeichnet werden können, die aber als Scheitelwinkel einander gleich sind, so daſs bei Gröſsenbetrachtungen nur einer von ihnen berücksichtigt zu werden braucht. Sehr empfehlenswert ist, sich bei diesen Untersuchungen eines beweglichen Drahtmodelles zu bedienen, so daſs man die Veränderungen der Winkel ad oculos demonstrieren kann. Es ist sogar möglich, auf diese Weise eine Art von Beweis für die Winkelsumme des Dreiecks vorzuführen. Läſst man nämlich zwei Winkel immer kleiner werden, so wird dabei der dritte Winkel stetig gröſser und er wird in dem Augenblick ein Flachwinkel, wo die beiden andern Nullwinkel werden.

So weit möchte ich jetzt die Betrachtungen ausdehnen[1]) und wende mich nun zunächst wieder zu den Aufsätzen in H. Z., die mit dem Thema des vorliegenden Kapitels in loserem oder engerem Zusammenhang stehen. Gleich Bd. I (p. 272) enthält in dem Aufsatze Sturm's „Über einige Inkorrektheiten, die sich in der Sprache, besonders der elementaren Mathematik eingeschlichen haben“, eine Arbeit, die nicht nur wegen ihrer allgemeinen Bedeutung Beachtung verdient, sondern auch gerade einige hierher gehörige Fragen erörtert. Nur erwähnen will ich die Verurteilung des unbestimmten Artikels bei eindeutig bestimmten Gebilden, es muſs korrekt heiſsen z. B.: „Durch einen Punkt die Parallele ziehen.“[2]) Sturm selbst sagt p. 273: „Der unbestimmte Artikel wird natürlich im systematischen Gange bei solchen Aufgaben bleiben müssen, von denen noch nicht erkannt worden ist, daſs nur ein einziges Gebilde existiert, welche also erst selber diese Erkenntnis bewirken sollen, aber auch bei solchen Aufgaben, bei

---

[1]) Doch mache ich darauf aufmerksam, daſs sich analoge Betrachtungen für Vieleckswinkel (reguläre Polygone) und die Winkel im und am Kreis leicht und natürlich ausschlieſsen lassen und man auf diese Weise dann noch einen weit tiefern Schritt in das planimetrische Gebiet hineinthun kann, ohne irgendwie Fremdartiges in die Untersuchung mischen zu müssen.

[2]) Man vergl. H. Z. 17, p. 433—435. — 18, p. 113—118. — 19, p. 576—582.

denen der Lage nach unendlich viele, wenn auch untereinander kongruente Lösungen möglich sind, und bei denen man auch zu sagen pflegt, es gebe nur eine Lösung. Es tritt hier zu der Notwendigkeit, dafs doch logisch richtig gesprochen werden mufs, noch der wichtige Umstand, dafs, wenn der richtige Ausdruck vom Lehrer und Lehrbuch angewandt und vom Schüler gefordert wird, derselbe sich immer wieder der Erkenntnis, dafs es in den betr. Fällen nur ein Gebilde giebt, bewufst wird, ein Umstand, der doch gewifs nicht ohne Wert ist." Neben einer Reihe weiterer Inkorrektheiten aus der Winkellehre z. B. $\hat{A} = \hat{B}$ als Scheitelwinkel; $\hat{A} + \hat{B} = 2R$ als Nebenwinkel[1]), kommt Sturm auf die Benennungen der Winkel bei einer Transversalen durch zwei Parallelen. Er sagt p. 277:

„Die Parallelitätssätze erinnern mich an eine Konfusion der Benennungen, deren baldige Abschaffung von uns Mathematikern auch nun einmal ins Auge gefafst werden und vielleicht nicht zu schwer ins Werk zu setzen sein möchte: Die Winkel, welche von zwei Geraden derselben Ebene mit einer sie schneidenden (Geraden) gebildet werden, haben in den verschiedensten Gegenden Deutschlands die verschiedensten Benennungen."

Sturm ist für die Namen „entsprechende Winkel", „Wechselwinkel", „entgegengesetzte Winkel", findet aber sofort einen Gegner in dem Herausgeber der H. Z., der sich für die Snell'sche Bezeichnung ausspricht. Da wir selbst positive Vorschläge in Bezug auf die Benennung der Winkelpaare gemacht haben, so können wir auf die betreffende Stelle verweisen.

J. C. Becker bemerkt in Bd. II der H. Z. zu demselben Thema (p. 91): „Was speziell die Benennung der Winkelpaare betrifft, welche zwei Geraden einer Ebene mit einer dritten bilden, so möchte ich die sehr verbreitete Bezeichnungsweise empfehlen, wonach jeder einzelne dieser Winkel als innerer oder äufserer bezeichnet wird, je nachdem er zwischen den geschnittenen Geraden liegt, oder nicht, und jedes Paar als

---

[1]) Man vergl. Sturm, Zum Kapitel der Inkorrektheiten; H. Z. III. p. 20.

Gegen- oder Wechselwinkelpaar, je nachdem beide Winkel auf derselben Seite der schneidenden Linie liegen, oder der eine links, der andere rechts von derselben. Man hat danach innere, äufsere und gemischte Gegen- oder Wechselwinkel zu unterscheiden. Weil aber die gemischten Gegenwinkel besser als korrespondierende oder entsprechende (auch gleichliegende) bezeichnet werden und von gemischten Wechselwinkeln nie die Rede ist, so dürften schliefslich die drei Namen, entsprechende Winkel, Gegenwinkel und Wechselwinkel, vollkommen ausreichen."

Eine weitere Meinungsäufserung über diesen Punkt findet sich in H. Z. III p. 190 in dem Aufsatze Zieglers, Thesen zu dem Streite über geometrischen Unterricht. Ziegler sagt:

„Die Lage der vier Winkel, welche einen gemeinsamen Scheitel haben, läfst sich durch die Gegensätze oben — unten, rechts — links unterscheiden. Nimmt man je zwei Winkel, welche verschiedene Scheitel haben, so erhält man vier Paare mit zweifach übereinstimmender Lage, vier Paare mit zweifach entgegengesetzter Lage und zweimal vier Paare mit halb übereinstimmender Lage. Diese Winkelpaare heifsen am besten gleichliegende, ungleichliegende und halbgleichliegende Winkel, sie verhalten sich beziehungsweise wie kongruente Winkel, Scheitel- und Nebenwinkel. Die Unterscheidung von zweierlei Paaren halbgleichliegender Winkel ist unnötig, sowie der Gebrauch besondrer Kunstwörter. Auf den Gegensatz Innen — Aufsen, welchen Snell zur Unterscheidung benutzt, kommt es gar nicht an, er gebraucht gerade für die gleichliegenden Winkel den schon anderswo nötigen Ausdruck Gegenwinkel. Jeder Lehrer kann die Probe machen, ob die Schüler zu den angegebenen Benennungen die Winkelpaare auffinden."[1])

[1]) Man sieht, Ziegler kommt genau zu denselben Resultaten wie ich. Dieselben Benennungen, die ich vorschlage, hat er schon 1872 vorgeschlagen, ohne Erfolg; aber es ist leicht möglich, dafs der betr. Aufsatz der Aufmerksamkeit der Fachgenossen entgangen ist. Hier möchte ich, was auch in Ziegler's letztem Satze liegt, noch einmal auf den Vorteil der vorgeschlagenen Benennungen hinweisen, der darin liegt, dafs der Name schon auf das Wesen der betrachteten Winkelpaare hindeutet, ein Vorteil, der gewifs doch nicht zu unterschätzen ist.

Unmittelbar mit Ziegler's Aufsatz hängt eine Notiz von J. Kober zusammen in H. Z. V. p. 55: „Die Benennung der Winkel in der Parallelentheorie ist noch ziemlich verschieden. Wechselwinkel[1]) ist so ziemlich allgemein im Gebrauch und dürfte wohl auch keinen Anstofs erregen. Aber Gegenwinkel hat den grofsen Fehler, dafs man dies Wort, analog der Gegenseite, für gegenüberliegende Winkel anwenden möchte, sodafs also Gegenseite und Gegenwinkel einander entsprechen würden.

Der Name „konjugierte Winkel" ist, wie mancher andere vorgeschlagene, zu lang, auch wohl nicht recht anschaulich begründet, die Benennung „innere Winkel" pafst auch für die inneren Wechselwinkel.

Eher möchte ich mich mit Ziegler's Vorschlag einverstanden erklären, nämlich gleichliegende (korrespondierende), ungleichliegende (innere Wechselwinkel) und halbgleichliegende (innere Gegenwinkel und gemischte Wechselwinkel); aber ohne Bedenken ist dieser Vorschlag auch nicht.

Ich glaube fast, es ist nur durch Bildung eines ganz neuen kurzen Wortes zu helfen und erlaube mir, den Kollegen die Frage vorzulegen, ob ein solches, etwa das Wort „Anwinkel"[2]) Zustimmung finden würde."

Die Redaktion bemerkt zu diesem Vorschlag, dafs dieser Ausdruck bereits in Osterreich längst gebräuchlich sei und führt zwei Lehrbücher (Gernerth, Moçnik) als Beispiele an. Der Herr Herausgeber fühlt sich auch veranlafst, in demselben Bande V seiner Zeitschrift noch einmal auf die vorliegende Frage zurückzukommen. Der kurze Aufsatz ist überschrieben: „Noch einmal der Anwinkel und die noch immer bestehende Konfusion der Winkelnamen in der Parallelentheorie." Hoffmann macht darin seine — wie mir scheint, völlig gerechtfertigten — Bedenken gegen diese Benennung geltend

[1]) Mein Mathematiklehrer, der originelle, an der Nikolaischule zu Leipzig weiland wirkende Lehmann, pflegte für diesen Winkel den Namen „Z-winkel" zu gebrauchen wegen der Ähnlichkeit der inneren Wechselwinkelfigur mit einem gedruckten lateinischen Z.

[2]) Scherling empfiehlt diesen Ausdruck in seiner Besprechung des Kober'schen Leitfadens. H. Z. V. p. 447. — Vergl. auch ebenda p. 450.

und empfiehlt wiederholt — unter alleiniger Ersetzung der „Gegenwinkel“ durch „korrespondierende Winkel“ — die Snell'sche Terminologie. Die Benennung nach der Lage der Winkel gegen Transversale und geschnittene Gerade wird dann systematisch vorgeführt. Der Aufsatz schliefst mit den Worten: „Wir empfehlen also aufs Neue die Annahme der modifizierten Snell-Schlömilch'schen Bezeichnung, nicht allein weil sie logisch und naturgemäfs ist, sondern auch, weil sie, wie wir aus Erfahrung wissen, von den Schülern leicht behalten wird.“

Ich selbst habe dann in Bd. 22 der H. Z. p. 521 in der Rezension des Müller-Zwerger'schen Lehrbuches schon meine auch im vorliegenden Werke ausgesprochene Meinung über die Benennung der fraglichen Winkelpaare und meine Beweggründe dafür ausgesprochen.

Beiläufig möchte ich den Leser noch darauf aufmerksam machen, was ihm vielleicht beim Studium der jetzt vorliegenden vier Kapitel schon selbst aufgefallen ist, dafs die Behandlung der grundlegenden Fragen der Geometrie in den Anfangsjahren der Hoffmann'schen Zeitschrift eine sehr lebhafte war, dafs aber später das Interesse an diesen Prinzipien fast völlig eingeschlafen zu sein scheint, obwohl im Wesentlichen nirgends eine Einigung über die streitigen Punkte erzielt worden ist. Zur Klärung dieser gewifs nicht haltbaren Zustände würde es sich vielleicht empfehlen, den Vorschlag E. Müller's in ernste Erwägung zu ziehen, den er in „Mahnung an die Mathematiker“ in H. Z. 6, p. 261—278 macht, eine gemeinschaftliche Revision der Elementarmathematik vorzunehmen. Andere speziell die hier angeregte Frage erörternde Artikel finden sich H. Z. 6, p. 457—458 und 7, p. 45—49.

Schliefslich ist dann noch der Vortrag zu erwähnen, den Prof. Sauer in der math.-naturwiss. Sektion der 42. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Wien dieses Jahr gehalten hat, über den das jetzt erschienene Doppelheft der H. Z. berichtet. Es heifst dort p. 529: „Immer noch herrscht Verschiedenheit in betreff der Winkelbenennung, wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden. Am glücklichsten gewählt ist der Name Wechselwinkel und über

seine Anwendung sind wohl alle Lehrer einig. Dagegen brauchen einige den Ausdruck Gegenwinkel, wo andre von entgegengesetzten Winkeln sprechen. Besonders aber für zwei Winkel, welche an derselben Seite der schneidenden Linie und an derselben Seite der geschnittenen Linien liegen, gehen die Bezeichnungen sehr auseinander. Ich erwähne die Namen: Korrespondierende Winkel, konjugierte Winkel, innere Winkel, gleichliegende Winkel, Gegenwinkel, endlich das neu gebildete Wort Anwinkel. Die ersten dieser Benennungen sind teils zu lang, teils Fremdwörter und passen deshalb nicht für den ersten Unterricht; Gegenwinkel[1]) pafst besser für die anderweitig entgegengesetzt genannten Winkel. Ich stimme deshalb Kober bei, der meint, es müfste für diesen Begriff ein neues Wort gebildet werden; nur kann mir die Zusammensetzung des Substantivs Winkel mit der Präposition „an" nicht gefallen. Ich möchte einen andern Vorschlag wagen, den ich allerdings im Unterrichte noch nicht erprobt habe. Der Teil der Werke des Aristoteles, der auf seine Physik folgt, heifst Metaphysik, obgleich nichts von Physik darin steht.[2]) Wäre es nicht angebracht, auch von einem ganz ähnlichen Kennzeichen ausgehend, den Winkel Seitenwinkel zu nennen, weil in der Erklärung sowohl bei den geschnittenen Linien als bei den Schneidenden gleiche Seiten genannt werden. Man hätte somit die gleichmäfsige Reihe: Seitenwinkel, Wechselwinkel, Gegenwinkel."[3])

Von den Abhandlungen in Grunerts Archiv gehört hierher Matzka, Über geradlinige Raumgebilde, die einfacher sind als das Dreieck, und über deren Verwendung zur Fundamentallehre der Geometrie. Bd. 8, p. 365—374.

---

[1]) Den leidigen Namen „Gegenwinkel" sollte man ein- für allemal fallen lassen. Er trägt Hauptschuld an der Verwirrung, und so lange er nicht ganz beseitigt ist, wird er weitere Verwirrung verursachen.

[2]) Der logische Zusammenhang ist uns hier nicht klar geworden. Vielleicht ist im Druck etwas versehen, da gerade das eigentliche Gegenteil des nach diesem Satze zu erwartenden folgt.

[3]) Der Referent — Prof. Haas-Wien — bemerkt hierzu schon in einer Fufsnote, dafs diese Einteilung lückenhaft ist und dafs es vier Arten von Winkelpaaren giebt.

Man habe, wie den Kreis für die einfachste krummlinige Figur, das Dreieck für das einfachste geradlinige Raumgebilde gehalten. Statt dessen seien zu setzen:

„1) Das System einer ganzen Geraden mit einem Punkte aufser ihr, und

2) Das System zweier paralleler ganzer Geraden, das wir kurzweg ein Parallelenpaar nennen wollen.“

Verfasser begründet sodann seine Ansicht, dafs diese Raumgebilde einfacher seien, durch den Hinweis auf die Anzahl der Elemente, führt das erstere System auf das zweite zurück. Dieses also legt er seinen Betrachtungen zugrunde gemäfs des von ihm aufgestellten Einteilungsprinzips.

Im zweiten Abschnitt, der von den folgenden Abschnitten für uns allein in Betracht kommt, stellt er die „Grundlinien der Lehre von den Parallelenpaaren“ auf.

1) (§ 7) Erklärungen. Parallelenpaar; Geleise; Streifen; Zwischenlinie (Zwischenstrecke) ist jede von einem Punkte der einen Parallelen zu einem Punkte der andren gehende Strecke.

2) (§ 8) Auf die Parallelentheorie gestützte einfache Sätze. Jede Zwischenlinie ist gegen beide Parallellinien gleich geneigt (Neigungswinkel).

Bes. Anwendung auf die Senkrechte. Eine solche heifse Querlinie.

Alle Querlinien eines Parallelenpaares sind einander gleich.

Daher Querlinie = Höhe (Breite) des Streifens.

3) (§ 9) Kongruenz der Parallelenpaare oder Streifen. Parallelenpaare mit gleicher Querlinie sind kongruent.

4) (§ 10) Ableitung des Satzes, dafs gleichmäfsige Zwischenlinien gleich sind.

Parallelen zwischen Parallelen sind gleich.

Zum gröfseren Neigungswinkel gehört eine kürzere Zwischenlinie.

Es folgen dann die Umkehrungen.

5) (§ 11) bringt dann Anwendungen bei der „Vergleichung von zwei Paar Zwischenlinien in zwei Parallelenpaaren“,

woran sich „die Proportionalität der Zwischenlinien in Parallelenpaaren“ anschliefst.

Uns scheint dieser Versuch sehr beachtenswert, er läfst sich übrigens auch bei der von uns vorgeschlagenen Behandlung der ersten Lehren der Planimetrie mit gutem Erfolg verwerten. Dafs er in den Lehrbüchern gar keine Beachtung gefunden hat, erregt mit Recht Verwunderung. Wir möchten hier nochmals mit Nachdruck auf diesen Artikel hinweisen.

Wir sehen, dafs die Literatur zu allen Fragen in Grunerts Archiv eine verschwindende gegen die Hoffmannsche Zeitschrift ist. Im weiteren Fortgang unseres Werkes wird sich dieses Verhältnis zum teil sehr ändern, worauf ich schon an dieser Stelle hingewiesen haben möchte.

Es erübrigt nun noch einen Artikel aus den „Lehrproben und Lehrgängen“ mitzuteilen, dann werden wir einige Programmabhandlungen und einige wenige Lehrbücher in den Kreis unserer Betrachtungen zu ziehen haben, da die Behandlung der Parallelenlehre im allgemeinen im dritten Kapitel bei den Zitaten angedeutet worden ist, dann aber auch die Verschiedenheiten in der Einzeldarstellung nicht von wesentlicher Bedeutung sind.

Im 10. Heft (Febr. 1887) der „Lehrproben und Lehrgänge“ findet sich ein Aufsatz von Lackemann „Die Sätze von den Parallelen. (Ein Beitrag zur Methodik des Elementar-Unterrichtes in der Planimetrie.)“

Nach einer kurzen methodischen Einleitung heifst es p. 57:

„Eingeleitet werden die Betrachtungen durch die Drehung einer Geraden um einen ihrer Punkte.“ (Winkel.) Besondere Wichtigkeit der Halbdrehung für die Deckung gleicher Strecken um einen gemeinsamen Endpunkt.

Geg. eine Strecke AB in C halbiert.

„Wir ziehen zunächst von dem Punkte B aus einen Halbstrahl BY und lassen ihn an der halben Drehung teilnehmen. Der Halbstrahl BY soll dabei fest mit CB verbunden bleiben.“ Neue Lage von BY (AX). Gleichheit der Winkel (α u. β).

Umkehrung der geschilderten Betrachtung.

Es wird nun AX über A hinaus verlängert. Beziehungen des neuen Winkels γ zu α und β.

Auch BY' wird über B verlängert. Vierter Winkel δ. Seine Beziehungen zu α, β, γ.

Schliefslich wird BA, dann AB verlängert und analoge Betrachtungen wie vorher angestellt. Benennung der Winkelpaare (Wechselwinkel, innere Winkel, Gegenwinkel).

Es werden darauf die Resultate der Untersuchungen in dem Satz zusammengefafst:

„Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten, so dafs zwei Wechselwinkel gleich sind, so sind (paarweise)[1])

a) auch die übrigen Wechselwinkel gleich,

b) die Gegenwinkel gleich,

c) die inneren Winkel gleich $2R$.[2])

Verfasser betrachtet nun dasselbe Raumgebilde, macht aber seine Beobachtungen unter der Voraussetzung, dafs die Beweglichkeit derartig sei, dafs nicht nur B nach A, sondern auch A nach B gedreht werde. Dann heifst es:

„Geht man jetzt zu den Parallelensätzen über, so ist im Wesentlichen alles Material für die Beweise zur Hand und die Arbeit der Schüler besteht darin, die ihnen geläufigen einzelnen Teile der Beweise in richtiger Art zu dem vollständigen Beweise zusammenzufügen."

Der erste Satz lautet:

„Zwei Geraden, welche durch eine halbe Drehung um die Mitte einer zwischen ihnen liegenden Strecke ihre Lage vertauschen oder, falls die eine Gerade festgehalten wird, zur Deckung gelangen, haben auch bei unbegrenzter Verlängerung keinen Punkt gemein, d. h. sie sind parallel."

Der Beweis schliefst mit der bekannten Folgerung. Die weitere Behandlung der Parallelensätze ist aus dieser Darstellung wohl von selbst klar, so dafs ich auf eine Wiedergabe des Folgenden verzichten kann.

Auch dieser Darstellung der Parallelensätze läfst sich die Anerkennung nicht versagen. Sie würde sich auch leicht mit der Matzka'schen kombinieren lassen. Vor allen Dingen ist die reichliche Verwendung der Bewegung erfreulich.

---

[1]) Dieser Zusatz ist von Wichtigkeit.

[2]) Warum nicht „supplementär"?

Zitate.

Kosack, Beiträge zu einer systemat. Entwicklung der Geometrie aus der Anschauung. — Nordhausen 1852.

p. 15: „Es drängt sich hier die Frage auf, wie grofs ein Winkel überhaupt werden könne. Die Drehung kann immer fortgesetzt, aber der Winkel auch ohne alle Grenzen gröfser gedacht werden. Allein wie aus dem Vorhergehenden hervorgeht, nimmt eine Linie ihre ursprüngliche Lage wieder ein, wenn sie sich um einen Winkel von $4R$ gedreht hat. — .. — Hieraus ergiebt sich klar, dafs alle für hier unterscheidbaren Winkelgröfsen in bestimmte Grenzen geschlossen sind, indem wenn ein Winkel mehr als $4R$ beträgt, man immer wieder zu einem Winkel gelangt, welcher mit dem durchaus zusammenfällt, den man als Rest erhält, wenn man den in Rechten ausgedrückten Winkel mit $4R$ dividiert. Man kann also diejenigen Winkel, welche bei dieser Division gleiche Reste geben, als völlig gleich betrachten.“

Die hier erörterte Frage der Unendlichkeit des Winkels habe ich auf Seite 123 dieses Bandes ebenfalls in Betracht gezogen. Ich kann mich daher hier auf jene Stelle beziehen.

Nachdem sodann die Neben- und Scheitelwinkel behandelt sind, heifst es p. 17: „Wenn sich drei verschiedene Linien einander schneiden, so finden zwischen den Winkeln, die sie hierbei bilden, gewisse Beziehungen statt, die im Folgenden erörtert werden sollen.“

Es wird zunächst zwischen der schneidenden und der Geschnittnen unterschieden und zunächst äufsere und innere Winkel von einander geschieden.

„Ein Paar, dessen beide Winkel an derselben Seite der Schneidenden liegen und von denen der eine ein äufserer, der andere ein innerer ist, ohne dafs beide Nebenwinkel sind, heifsen Gegenwinkel.“

Die Bedingung „ohne dafs beide Nebenwinkel sind“ hatten wir durch unsre Disposition vermieden; dagegen liegt andrerseits in dieser Einschränkung der Hinweis auf denjenigen Zusammenhang zwischen den Winkeln an zwei Scheiteln, den

wir auf Seite 338 angedeutet und auf Seite 362 f. ausführlicher dargestellt haben.

„Ein Paar innere Winkel, welche an verschiedenen Seiten der Schneidenden liegen ohne Nebenwinkel zu sein, heifsen Wechselwinkel."

Dieser Erklärung folgt drittens: „Ein Paar innerer Winkel, welche auf derselben Seite der Schneidenden liegen, heifsen innere zugehörige Winkel."

Mittelst Drehung wird nun zunächst gezeigt, dafs „jeder Aufsenwinkel (der nicht ein Scheitelwinkel von einem inneren ist) so grofs ist, wie die beiden gegenüberliegenden[1]) zusammengenommen". Hieraus wird dann gefolgert, dafs die Winkelsumme des Dreiecks einen Flachwinkel beträgt.

Es folgen dann die Erörterungen über den Zusammenhang der 16 Winkelgleichungen, nachdem die Gleichheit der Gegenwinkel mit dem gleichen Richtungsunterschied identifiziert worden ist. Hieraus läfst sich dann sofort erkennen, wie der Verfasser den Zusammenhang der behandelten Sätze mit der Parallelenlehre darstellt, zumal wenn man weifs, dafs er die Parallelen als Geraden gleicher Richtung definiert. Hieran schliefsen sich dann die Umkehrungen, deren letzter Satz das elfte Axiom ist.

Friedrich Schmeisser, Bemerkungen zu einer wissenschaftlichen Behandlung der Lehren der Geometrie. — Frankfurt a. O. 1855.

Der Verfasser sagt p. 18: „Dafs die Theorie jeder Wissenschaft mit den einfachsten Lehren beginnen müsse, versteht sich von selbst. Daher mufs auch der erste Hauptteil der Geometrie

I. Von den Linien und Winkeln nach ihrer Lage und Gröfse handeln."

Man dürfe aber diese Betrachtungen nicht in die Planimetrie bringen.

---

[1]) Vergl. unsre Fufsnote auf Seite 366.

Es wird dann auf den Zusammenhang des Winkels mit dem Kreise eingegangen.[1])

p. 21 bemerkt Schmeisser: „Dafs die Einteilung des Kreises in 360° nicht aus dem alten Egypten stammt, hat schon Weidler (histor. astron. p. 56) dargelegt. Es ist hinreichend ermittelt, dafs sie aus der Zeit des Eudoxus herrührt und wahrscheinlich von Eratosthenes und Hipparch v. N. verbreitet worden ist. Strabo II. p. 194. 172. Manilius I. 572. Vergl. J. H. Voss zu Vergils Landbau I. 233.“

Wir verweisen, was diese Frage betrifft, auf unser Zitat aus Cantor auf Seite 343.

Zerlang, Beitrag zu einer genetischen Entwicklung der Planimetrie. — Sorau 1860.

Zerlang giebt die Definition des Winkels als Richtungsunterschiedes und geht sofort auf den Zusammenhang des Winkels mit dem Kreise ein. Mit Hülfe des Kreises löst er dann, noch ehe er von der Bezeichnung der Winkel handelt, die Aufgabe, einen Winkel zu zeichnen, der einem gegebenen gleich ist. Der Angabe der Namen und der sehr ausführlichen Behandlung des Richtwinkels folgt dann die Aufgabe, zwei gegebene Winkel zu addieren. Es folgen die Betrachtungen über Neben-, Komplement- etc. Winkel und praktische Übungen im Addieren und Subtrahieren von Winkeln. Den rechten Winkel bezeichnet er als Mafseinheit.

Den Linien mit Richtungsunterschied stellt er sodann diejenigen mit gleicher Richtung gegenüber, die parallel heifsen. Auch hier werden die Einzelbeziehungen sehr gründlich erörtert, dann geht der Verfasser zu den Winkelpaaren bei Geraden über und stellt die bekannten Sätze auf, die ihm sofort zur Lösung der Aufgaben dienen, durch einen Punkt die Parallele zu einer gegebenen Geraden zu ziehen. Als Umkehrung folgt dann der Satz: Werden zwei Parallelen von

---

[1]) Schmeisser nimmt mit Baroccio an, dafs die Euklidsche Definition des Winkels κλισις ein Schreibfehler sei, dafs es heifsen müsse κλασις = fractio.

einer Geraden geschnitten, so etc.[1]) — Der Beweis stützt sich überall hier wie dort auf die Winkeldefinition.

Der Satz von der Winkelsumme im Dreieck und die zugehörigen Sätze werden natürlich mit Hülfe der parallelen Hülfslinie bewiesen.

Fr. Becker, Die elementare Geometrie in neuer Anordordnung I. Hanau, 1870.

Schon oben (p. 339) hatte ich angekündigt, dafs ich auf die duale Behandlung von Strecke und Winkel noch näher eingehen würde.[2]) Hierzu bietet die vorliegende Abhandlung geeignete Veranlassung. Um einigermafsen die leitenden Gedanken des Verfassers der Erkenntnis nahe zu bringen, gebe ich, ehe ich auf den uns hier interessierenden Text eingehe, das Schema der Darstellung.

I. Offne Figuren. Kreis.

1) Punkte und Gerade in gegenseitiger Beziehung.

2) Strecke und gebrochene Linie.

3) a) Kreis. b) Winkel.

1) Zunächst wird auf den Zusammenhang von Winkel und Drehung eingegangen.

Dann folgen die Beziehungen der Winkel, Erklärungen[3]), daran sich anschliefsende Konstruktionsaufgaben und duale Gegenüberstellungen von Winkel- und Bogensätzen. p. 13 folgt 4:

„Strecken und Winkel (Analogieen).

Strecken können nur hinsichtlich ihrer Lage und Gröfse von einander verschieden sein; daher sind gleiche Strecken kongruent.

Winkel können nur hinsichtlich ihrer Lage und Gröfse von einander verschieden sein; daher sind gleiche Winkel kongruent.

---

[1]) Nach der vorhergehenden Anordnung des Verfassers hätte, meiner Meinung nach, dieser Satz der Hauptsatz sein, der erste dagegen als die Umkehrung gelehrt werden müssen.

[2]) Man vergleiche meine Ausführungen p. 120 ff.

[3]) Eine derartige Erklärung ist z. B.: „Die Entfernung zweier gleichweit vom Scheitel eines Winkels abstehenden Schenkelpunkte heifst die Schenkelweite für diesen Abstand.

Vergleichung von Strecken durch Aufeinanderlegen.

Summe und Differenz von Strecken.

Vergleichung von Winkeln durch Aufeinanderlegen.

Summe und Differenz von Winkeln."

Es läfst sich nicht leugnen, dafs eine derartige duale Behandlung der beiden Elemente Strecke und Winkel von grofsem Vorteil im Unterricht ist. Man sollte nicht versäumen, auf diese Darstellung des Zusammenhangs der beiden Elemente ausführlich einzugehen.

p. 14 folgt 5: „Mehrere Winkel in Beziehung zu einander."

Hier finden wir die Beziehungen der Nebenwinkel, Scheitelwinkel etc., zum teil allerdings mit Aufstellung sehr überflüssiger Sätze, wie z. B. Lehrsatz: „Alle flachen Winkel sind einander gleich"; dieser Lehrsatz wird mittest Deckung bewiesen.

p. 17 Nr. 6: „Winkelkreuz, Halbierungskreuz, Parallelen, Konvergenten."

„Erklärung. Zwei Gerade, welche sich schneiden, bilden ein Winkelkreuz (Geradenkreuz, geraden Vierstrahl, vollständiges Winkelgebilde)."

„Ist einer der vier Winkel des Kreuzes ein rechter Winkel, so ist jeder derselben ein rechter[1]); ist dagegen einer kein rechter, so ist keiner ein rechter."

„Von der Gröfse eines der vier Winkel eines Kreuzes ist die Gröfse der drei übrigen abhängig, d. h. jeder Winkel bestimmt ein ihm zugehöriges Kreuz."

Hieran schliefsen sich einige Folgesätze über die Vergleichung zweier Kreuze.

Es heifst dann p. 18:

„Für eine Gerade giebt es durch einen Punkt auf derselben nur einen Winkel, von dessen Schenkeln jeder für sich

Für einen Winkel giebt es in einer Fläche durch den Scheitel nur eine Gerade, von deren Strahlen jeder für

[1]) Die Hinweisung auf diesen Spezialfall haben wir in unserer Darstellung leider unterlassen; es möge deshalb hier darauf ausdrücklich hingewiesen werden.

mit den Strahlen der Geraden gleiche Winkel bildet. Dieser Winkel ist ein flacher, seine Schenkel stehen senkrecht zu der Geraden.	sich mit den Schenkeln des Winkels gleiche Winkel bildet. Diese Gerade halbiert den Winkel.

oder:

Mit den beiden Strahlen einer Geraden kann nur eine einzige Gerade gleiche Winkel bilden; diese Gerade heifst Senkrechte zur ersten.	Mit den beiden Schenkeln eines Winkels kann nur eine einzige Gerade gleiche Winkel bilden; diese Gerade heifst die Winkelhalbierende.“

p. 19: „Die Winkelhalbierenden eines Kreuzes bilden ein rechtwinkliges Kreuz.“ Folgesätze und Umkehrungen.

„Die beiden Normalen im Scheitel eines Kreuzes zu dessen Geraden bilden ein ihm gleichwinkliges Kreuz (Normalenkreuz).“

Durch den Satz: „Eine Transversale eines Kreuzes, welche nicht durch den Scheitel geht, schneidet entweder nur eine seiner Geraden oder beide“ wird dann die Lehre von den „gleichliegenden“ etc. Winkeln eingeleitet.

Begriffe des ebenbildlichen und des gegenbildlichen Kreuzes. Bei Parallelen haben wir, wenn eine Transversale da ist, ebenbildliche Kreuze resp. wenn die Kreuze ebenbildlich sind, so sind zwei Geraden parallel. Anwendungen. Dann folgt das elfte Axiom resp. dessen Umkehrung. Der folgende Abschnitt bringt dann in analoger Behandlung die Winkellehre beim Dreieck. Besonders ist zu erwähnen, dafs die Seitenbeziehungen und Winkelbeziehungen in dualer Weise dargestellt werden.

Die ganze, durch Originalität und Geist ausgezeichnete Arbeit ist sehr lesenswert.

Polster, Geometrie der Ebne. — Würzburg 1878.

Es wird genügen, wenn ich von dieser Abhandlung die Disposition mitteile.

II. Kapitel.

Winkel an einem Scheitel.

§ 5. Vergleichung zweier Winkel.
(Addition und Subtraktion der Winkel.)

§ 6. Nullwinkel, Vollwinkel, gerade Winkel.

§ 7. Nebenwinkel.

§ 8. Scheitelwinkel.

III. Kapitel.

Theorie der Konvergenz und des Parallelismus.

§ 9. Definitionen (Innere [äufsere] Winkel, Gegenwinkel, Wechselwinkel, korrespondierende Gegenwinkel etc.).

§ 10. Kriterien der Konvergenz (im ganzen zehn).
(Nr. 5 = Elftes Axiom.)

§ 11. Gegenwinkel und Wechselwinkel an Parallelen. (Erster Lehrsatz: „An parallelen Graden ist jeder Winkel einem gleichliegenden Winkel gleich.“ Beweis indirekt.)

§ 12. Kriterien des Parallelismus (im ganzen vier).

§ 13. Gegenwinkel und Wechselwinkel an konvergenten Geraden.

§ 14. Richtungen von geschnittnen Geraden gegen die Durchschnittslinie.

§ 15. Weitere Sätze über die Parallelen.

§ 16. Parallelwinkel in einer Ebene.

In einem Anhang giebt der Verfasser noch eine „andere Art der Theorie des Parallelismus und der Konvergenz“ und zwar so, dafs der § 10 hinter § 13 folgt; in einem zweiten Anhang findet sich noch eine „dritte Art der Theorie des Parallelismus und der Konvergenz.“ Hier ist die Reihenfolge: § 14 (auf § 9 folgend), § 11, § 12, § 13, § 10.

Korneck, Genetische Behandlung des planimetrischen Pensums der Quarta. — Kempen 1879 (Nr. 125).

Die Anordnung des Stoffes ist folgende:

§ 1. Definitionen. — § 2. Winkel (Definition, Benennungen, benannte Zahl; dieser § schliefst mit dem Satze: „Wenn zwei Strahlen mit einer Geraden gleiche Winkel in demselben

Drehungssinne bilden, so haben die Strahlen gleiche Richtung; denn ihre Richtungen weichen gleichviel von einer dritten ab“). — § 3. Zwei Punkte. Der Kreis. — § 4. Kreis und Gerade. — § 5. Drei Punkte. Das Dreieck. — § 6. Zwei Kreise. — § 7. Das gleichschenklige und das rechtwinklige Dreieck. — § 8. Konstruktionen. — § 9. Parallele Geraden (Definition; Sätze). — § 10. Nebenwinkel und Scheitelwinkel. — § 11. Winkel bei Parallelen. — Auf diesen Paragraphen müssen wir näher eingehen.

Es wird zunächst zwischen äufseren und inneren Winkeln unterschieden. Betreffs der Benennung der verschiedenen Winkelpaare bedauert Verfasser die vielen Verschiedenheiten bei den verschiedenen Autoren und fügt hinzu[1]):

„Am konsequentesten scheint mir die Einteilung der betreffenden Winkel von Snell in folgender Weise durchgeführt zu sein:

1) Beide Winkel liegen auf derselben Seite der Transversalen und sind

a. ein äufserer und ein innerer,
b. zwei innere,
c. zwei äufsere.

2) Die Winkel liegen auf verschiedenen Seiten der Transversalen und sind

a. ein äufserer und ein innerer,
b. zwei innere,
c. zwei äufsere.

Die Winkel 1a) nennt Snell Gegenwinkel.
1b) Innenwinkel.
1c) Aufsenwinkel.
2a) Gegenwechselwinkel.
2b) Innenwechselwinkel.
2c) Aufsenwechselwinkel.

Dr. Joh. Müller (Lehrbuch der elementaren Planimetrie, Bremen 1870) nennt die Winkel an verschiedenen Scheiteln und an derselben Seite der Transversalen Gegenwinkel, an verschiedenen Seiten der Transversalen Wechselwinkel und

---

[1]) Man vergleiche unsere entsprechenden Ausführungen weiter oben.

unterscheidet dann: a. Gemischte Gegenwinkel (ein innerer und ein äufserer); b. Gleichartige Gegenwinkel (zwei innere oder zwei äussere); c. Gemischte Wechselwinkel (ein innerer und ein äufserer); d. Gleichartige Wechselwinkel (zwei innere oder zwei äufsere).

Baltzer (Elemente etc.) kennt nur a. Innere Winkel (auf derselben Seite der Transversalen); b. Gegenwinkel (ein äufserer und ein innerer an derselben Seite der Transversalen); c. Wechselwinkel (zwei innere Winkel an verschiedenen Seiten der Transversalen).

So findet sich fast in jedem Buche leider eine andere Bezeichnung für dieselbe Sache. Übereinstimmung herrscht im allgemeinen nur darin, dafs zwei innere oder äufsere Winkel auf verschiedenen Seiten der Transversalen Wechselwinkel, ein äufserer und ein innerer auf derselben Seite Gegenwinkel oder Korrespondierende Winkel genannt werden. Die Winkel 2a. der Snell'schen Einteilung werden in der Regel gar nicht berücksichtigt oder (Focke und Krafs) mit 1b. und c. vereinigt. In Bezug auf die Winkel, die entweder zwei äufsere oder zwei innere an derselben Seite der Transversalen sind, herrscht die gröfste Verwirrung. Sie heifsen z. B. entgegengesetzte Winkel (Kambly), Ergänzungswinkel (Hub. Müller, Focke und Krafs), Gegenwinkel (Recknagel, NB. dasselbe Wort in anderer Bedeutung, als es die meisten anderen Bücher anwenden!), Anwinkel (Schram; eine Benennung, deren Etymologie mir noch unklar ist) u. s. w."

Der Verfasser selbst giebt folgende nicht üble Erklärung:

„Man kann die betreffenden Winkel dadurch unterscheiden, dafs man ihre Drehungsrichtung von der Transversalen aus ins Auge fafst. Denkt man sich zunächst die geschnittenen Linien mit der Transversalen zusammenfallend und dann um ihre Schnittpunkte beispielsweise den Zeigern der Uhr entsprechend oder entgegengesetzt gedreht, so können wir die Winkel bezeichnen als Winkel von gleicher Drehungsrichtung und Winkel von entgegengesetzter Drehungsrichtung."

Die Winkelsätze bei den Parallelen beweist der Ver-

fasser mit Hülfe von Senkrechten und der dadurch entstandenen kongruenten Dreiecke. Die Umkehrungen ergeben sich von selbst.

A. Wernicke, Die Grundlage der Euklidischen Geometrie des Mafses. — Braunschweig 1887 (Nr. 638).

Wernicke geht aus von dem Winkelstrahl, über den er eine Reihe von Sätzen aufstellt, z. B.: „Jede Gerade, welche beide Schenkel eines Winkelstrahls trifft, schneidet die Achse desselben.“

„§ 96. Postulat: Jede Strecke und jeder Winkel ist in beliebiger Weise übertragbar, d. h. man darf diese Gebilde, sobald sie irgendwo vollkommen bestimmt sind, an jeder anderen Stelle des Raumes wiederum als gegeben annehmen.“

§ 101 lautet: „Die Methode der Geometrie des Mafses wird dadurch bestimmt, dafs aus einer Strecke und aus einem Winkel bez. zwei Mafse hergestellt werden, welche zunächst eine zahlenmäfsige Vergleichung von Strecken und Winkeln ermöglichen, dann aber auch zu weiteren Messungen führen.“

Der folgende Abschnitt behandelt sodann die „Einführung und Verbindung der beiden Mafse“ und zwar zuerst die Strecke, dann den Winkel (Mafsebene). Hierauf scheidet sich der Stoff so, dafs zuerst die Winkelpaare an einer Geraden bez. an einem Winkelstrahl, sodann die Winkelpaare an zwei sich schneidenden Geraden abgehandelt werden. § 114 bringt Winkelpaare an drei sich schneidenden Geraden. Der erste Lehrsatz, der aufgestellt wird, heifst: „Jeder Aufsenwinkel ist gröfser als ein nichtzugehöriger Dreieckswinkel.“

Im § 115 giebt Wernicke folgendes Schema:

„I. Winkelpaare aus gleichartigen[1]) Elementen.

1) Ohne Überschreitung der Schneidenden: Gleichartige Gegenwinkel (Ergänzungswinkel).

2) Mit Überschreitung der Schneidenden: Wechselwinkel.

---

[1]) Gleichartig werden Winkelpaare genannt, wenn je zwei äufsere oder je zwei innere Winkel die Elemente sind; ungleichartig, wenn je ein äufserer und je ein innerer Winkel zum Paar gehören.

II. Winkelpaare aus ungleichartigen Elementen.

1) Ohne Überschreitung der Schneidenden: Gegenwinkel.

2) Mit Überschreitung der Schneidenden: Ungleichartige Wechselwinkel."

Wir können uns mit diesem Schema völlig einverstanden erklären, besonders erscheint uns die Unterscheidung der gleichartigen und ungleichartigen Elemente recht glücklich; nur der Name „Ergänzungswinkel" erregt Anstofs, da hier in den Namen eine Eigenschaft vornweg genommen ist, die noch dazu nur für einen bestimmten Fall resp. eine bestimmte Voraussetzung existiert. Bei bestimmten Lagen der Geschnittenen werden die Elemente von I, 2 und II, 1 gleich, diejenigen von I, 1 und II, 2 supplementär. Der Verfasser geht dann sofort dazu über zu zeigen, dafs, wenn eine der 16 Gleichungen gilt, alle gelten und dafs dann die geschnittenen keinen Punkt gemeinsam haben. Solche Geraden heifsen parallel.

In den §§ 120—125 spricht sich der Verfasser über „die natürliche Einheit der Winkelmessung" aus. Er wählt zum Mafs den Winkel, der viermal an einander gelegt die Mafsebene ausfüllt, legt also den Richtwinkel der Messung zugrunde, womit wir uns nicht einverstanden erklären können. Die natürliche Mafseinheit ist der Vollwinkel selbst.

Soweit ging die Behandlung des Winkels, nun folgt 3) Beziehungen beider Mafse, der Seiten und Winkel des Dreiecks betrachtet, auf die Kongruenzlehre eingeht, und schliefslich die wichtige Frage erörtert: „Bilden Parallelen mit jeder Schneidenden gleiche Gegenwinkel?" Diese Frage ist identisch mit derjenigen: „Wie viel Parallelen können durch einen Punkt zu einer Geraden gezogen werden?" Die Antwort kann nur mit Hülfe eines Axioms gegeben werden; setzen wir die Anzahl auf eins fest, so wird auch die erste Frage bejaht und damit zugleich der Satz von der Winkelsumme im Dreieck entschieden.

H. Müller, Über den ersten planimetrischen Unterricht. — Berlin 1889 (Nr. 68).

Die Abhandlung bringt im zweiten Abschnitt die „Lehre

von den Winkeln“, und zwar behandelt § 4 „Begriff des Winkels. Allgemeine Winkelsätze,“ § 5 „Winkel bei Parallelen.“

Schon daraus, dafs diesen beiden Paragraphen 16 Quartseiten gewidmet sind, kann man ersehen, wie ausführlich die vorliegende Darstellung ist und wie eingehend die Untersuchungen geführt werden. Der Verfasser geht aus von den drei möglichen Lagen zweier Geraden — die nebenbei gesagt in völlig unsystematischer Weise aufgezählt werden — und definiert sodann den Winkel als Ebenenteil. Es folgen die Erklärungen über Bezeichnung und Benennung; dann der mit der Definiton nicht zu vereinbarende Satz, dafs die Gröfse des Winkels von der Länge der Schenkel unabhängig sei, wobei der Verfasser natürlicherweise die Drehung mit heranziehen mufs. Bei der vom Verfasser gegebenen Definition müfste gesagt werden, die Schenkel sind immer als vollkommene Strahlen zu denken, wenn sie auch nur zum teil gezeichnet werden.

An die Relation des Winkels mit der Drehung schliefst sich unmittelbar die Gröfsenvergleichung durch Aufeinanderlegen, daran die Benennung der verschiedenen Winkelarten. Durch Zerlegung des flachen Winkels kommt man auf die Nebenwinkel.

Der Mafsstab, um einen Winkel seiner Gröfse nach genau angeben zu können, ist der flache Winkel (Gradeinteilung) — der selbst doch erst ein abgeleiteter ist. Der Winkelmesser wird zu Hülfe genommen und mit ihm Übungen im Antragen und Abtragen von Winkeln vorgenommen. Verfasser schildert eingehend sein Verfahren und giebt Beispiele von Aufgaben.

p. 18: „Sind die bisher besprochenen Ubungen in hinreichendem Mafse vorgenommen und dadurch Begriff und Anschauung des Winkels zu dauerndem Eigentum geworden, so kann der Schüler zur Bildung der einfachsten Lehrsätze über die Winkel geführt werden. Er weifs bereits,

dafs alle flachen Winkel gleichgrofs sind,
dafs die Gröfse eines flachen Winkels $2R$ beträgt,
dafs die Gröfse eines rechten Winkels gleich $1R$ ist und
dafs folglich alle rechten Winkel gleichgrofs sind.

Er kennt ferner die Erklärung für die Nebenwinkel und

weifs, dafs zwei Nebenwinkel die Teile eines flachen Winkels sind, dafs also durch Addition zweier Nebenwinkel ein flacher Winkel gebildet wird; es bedarf demnach keines Beweises mehr für den

„Lehrsatz 1: Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 2*R*." Allerdings bedarf der Schüler keines Beweises für diesen Satz, weil er eben gar kein Lehrsatz ist. Man vergleiche hierzu unsre Ausführungen in der Fufsnote auf Seite 351 und Seite 352, besonders die letztere. Was sind es aber überhaupt für „Lehrsätze," die der Verfasser aufstellt!

„Die Gröfse eines rechten Winkels ist gleich 1*R*." (!!) Was soll man zu einer solchen Verirrung sagen.

Der zweite Lehrsatz ist der von den Scheitelwinkeln, der mit Hülfe der Nebenwinkel unmittelbar aus der Anschauung gewonnen wurde. Hiermit dürfe man sich aber nicht begnügen.

„Aus diesem Grunde halte ich einen Beweis des ausgesprochenen Lehrsatzes für durchaus erforderlich; zugleich aber benutze ich die Gelegenheit, um den Schüler mit verschiedenen Beweisformen bekannt zu machen, deren Kenntnis ihm nicht minder notwendig ist, wie dem Arbeiter die Kenntnis seines Handwerkszeuges. Beim ersten Beweisverfahren stützen wir uns auf den Satz, dafs kongruente Winkel gleich grofs sind und nehmen, indem wir die Winkel zur Deckung bringen, die Anschauung zu Hülfe: Durch vier vollkommen gleiche dünne Stäbe stellen wir zwei sich schneidende Paare von Geraden dar, die im Schnittpunkte, ihrem Mittelpunkte, derart aneinander befestigt werden, dafs sie um denselben gedreht werden können. Die Stellung der beiden ersten Geraden zu einander wird als unveränderlich angenommen, während das zweite Paar beweglich bleiben soll. Nun legen wir das bewegliche Paar so auf das erste, dafs die Schnittpunkte sich decken und eine der Geraden des zweiten Paares mit einer Geraden des ersten Paares zusammenfällt; drehen wir dann die zweite Gerade des zweiten Paares, bis sie ganz auf der zweiten Geraden des ersten liegt, so bedecken sich die beiden Paare vollständig und die acht Winkel um die beiden Schnittpunkte erweisen sich als paarweis kongruent. Wird jetzt das zweite Paar von

dem ersten abgenommen, ohne Änderung an der gegenseitigen Lage der Geraden in der Luft halb herumgedreht und dann wieder auf das erste gelegt, so bedecken sich die beiden Paare von neuem und die Winkel des zweiten Paares fallen vollständig auf die Schtw zu denjenigen Winkeln des ersten Paares, zu denen sie vor der halben Umdrehung kongruent gewesen waren. Jeder Winkel des zweiten Paares kann also zwei Winkel des ersten Paares vollständig bedecken und von ihnen vollständig bedeckt werden; das ist aber nur möglich, wenn die beiden Winkel selber kongruent, also gleich sind."

Als zweites Verfahren schildert Verfasser dann das rechnerische. Bei der Aufstellung der dazu nötigen Grundsätze müsse man sparsam sein, da sie auswendig gelernt werden müfsten. Sie seien durch Beispiele genügend einzuprägen. Bei dieser Gelegenheit spricht sich Verfasser dafür aus, den Beweis von der ganzen Klasse „durch Zusammensprechen" vortragen zu lassen, ein Verfahren, dessen Vorzüge ich nicht einsehen kann, das ich sogar für entschieden falsch halte. Solche Methode gehört nicht in den mathematischen Unterricht.

Zur weiteren Befestigung des Gelernten läfst Müller dann die beiden Sätze entwickeln: „Die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel[1]) stehen senkrecht auf einander" und „Die Halbierungslinie eines Winkels halbiert auch seinen Scheitelwinkel."

Bemerkenswert ist Seite 21: „Zu einer schönen Übung veranlassen auch die vier Lösungen der Aufgabe einen Winkel α in einem Punkte P einer Geraden AB an dieselbe anzutragen."

Der Gedanke und seine Ausführung haben mir sehr gefallen. Hierbei kommt der Verfasser auf die indirekte Beweisform zu sprechen.

Dann geht er über zu Winkeln an zwei Scheiteln und entwickelt die Sätze über Supplementwinkel und derartige Sätze wie: „Sind zwei Winkel einander gleich, so ist jeder von ihnen gleich dem Scheitelwinkel des andern." Dazu giebt er arithmetische Beweise.

§ 5 überträgt nun die letzten Betrachtungen auf den Fall,

---

[1]) Besser eines Paares von Nebenwinkeln.

dafs zwei Geraden von einer dritten geschnitten werden. Natürlich ist, dafs auch Müller sich über die Verwirrung in der Bezeichnung der Winkelpaare ausläfst. Er sagt:

„Eine Übereinstimmung in der Wahl der Bezeichnungen wird man in den verschiedenen planimetrischen Lehrbüchern vergeblich suchen. Während die meisten nur drei Arten von Winkelpaaren unterscheiden und ihnen häufig ungeschickte, weil zu wenig charakteristische Benennungen geben, weisen andere, wie der Leitfaden von Feld und Serf nicht weniger als sechs verschiedene Arten von Winkelpaaren auf und erzwingen die Genauigkeit der Bezeichnungen durch eine Anhäufung des Memorierstoffes, die um so weniger auf Billigung rechnen darf, als sie recht gut vermieden werden kann. Unterscheidet man nämlich bei den schneidenden Geraden eine rechte und eine linke Seite (resp. ein oben und unten) und bei den geschnittenen Geraden ein oben und unten (resp. rechte und linke Seite), so sind nur drei wesentlich von einander verschiedene Arten von Winkelpaaren denkbar, je nachdem die Winkel

1. beide auf derselben Seite der schneidenden und auf gleichen Seiten der geschnittenen Graden,

2. beide auf verschiedenen Seiten der schneidenden und auf verschiedenen Seiten der geschnittenen Graden,

3. entweder auf derselben Seite der schneidenden aber auf verschiedenen Seiten der geschnittenen, oder auf verschiedenen Seiten der schneidenden aber auf gleichen Seiten der geschnittenen Geraden liegen. Den ersten Paaren kommt die Bezeichnung gleichliegende oder korrespondierende Winkel zu und die zweiten Paare werden durch die Benennung Wechselwinkel treffend charakterisiert, während für die Paare der dritten Abteilung, so viel mir bekannt ist, keine Bezeichnung existiert, die ihre gegenseitige Lage genau bestimmte. Bei der Schwierigkeit, das gemeinsame und das verschiedene in der Lage durch ein Wort auszudrücken, ist das vollkommen erklärlich. Es empfiehlt sich daher, von einer aus der Lage abgeleiteten Benennung dieser Winkel vollständig abzusehen und einen Namen zu wählen, welcher eine in zahlreichen Fällen auftretende Eigenschaft dieser Paare zum Aus-

druck bringt, nämlich den Namen Ergänzungswinkel. Hiernach hat sich der Schüler die folgenden Erklärungen genau einzuprägen:

Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten, so entstehen an den Schnittpunkten acht Winkel, von denen je zwei an verschiedenen Schnittpunkten liegende Winkel einen gemeinsamen Namen führen.

1. Die Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden und auf gleichen Seiten der geschnittenen Geraden liegen, heifsen korrespondierende Winkel (Korr. W.).

2. Die Winkel, welche auf verschiedenen Seiten der schneidenden und auch auf verschiedenen Seiten der geschnittenen Geraden liegen, heifsen Wechselwinkel (W. W.).

3. Die Winkel, welche entweder auf derselben Seite der schneidenden und auf verschiedenen Seiten der geschnittenen, — oder auf verschiedenen Seiten der schneidenden und auf gleichen Seiten der geschnittenen Geraden liegen, heifsen Ergänzungswinkel (Erg. W.)."

In höchst ausführlicher Weise werden sodann die Beziehungen der 16 Winkelpaare erörtert.

Schon die Zusammenstellung dieser wenigen Bearbeitungen der Winkellehre hat gezeigt, dafs die Behandlung eine mannigfaltige sein kann. Meine ursprüngliche Absicht, auch noch aus verschiedenen Lehrbüchern Zitate mitzuteilen, habe ich mich entschlossen aufzugeben; einerseits weil die Zitate doch nicht ganz vollständig gegeben werden können, trotzdem aber einen übermäfsigen Raum in Anspruch nehmen; dann, weil es sich hier nicht um eine prinzipielle Frage handelt, deren Erledigung die Wichtigkeit für sich in Anspruch nehmen kann, wie die Erörterung der Grundbegriffe.

Erwähnen möchte ich noch als beachtenswert wegen origineller oder besonders ausführlicher Behandlung folgende Lehrbücher:

J. Müller, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. — Bremen 1870.

J. Helmes, Die Elementar-Mathematik. II. — Hannover 1874.

Hub. Müller, Leitfaden d. eb. Geometrie. I. — Leipzig 1874.
Kruse, Geometrie d. Ebene. — Berlin 1875.
Henrici u. Treutlein, Lehrbuch der Elementargeometrie. — Leipzig 1881.
Schindler, Die Elemente der Planimetrie. — Berlin 1883.
Rausenberger, Die Elementargeometrie etc. — Leipzig 1887.

Hiermit will ich das vorliegende Kapitel schliefsen, da § 3, der drei oder mehr Winkel behandelt, von keiner besondern Bedeutung erscheint, teils aber auch darin Fragen zur Erledigung kommen, die an anderer Stelle erörtert werden können. Sie sollen daher im dritten Bande erledigt werden.

Alphabetisches Verzeichnis der zitierten Werke.

Im Text verarbeitete oder erwähnte Abhandlungen (oder Werke).

§ 3. Lagen- und Mafsuntersuchungen 60

Im Text verarbeitete oder erwähnte Abhandlungen etc.

Im Text verarbeitete (oder erwähnte) Abhandlungen etc.

Im Text verarbeitete oder erwähnte Abhandlungen (resp. Werke).

